ESTADO DEL ARTE EN TEORÍA DE PORTAFOLIOS: DEL ANÁLISIS INDIVIDUAL DE ACCIONES A LA OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO

STATE OF THE ART IN PORTFOLIO THEORY: THE INDIVIDUAL ANALYSIS OF ACTIONS TO THE MULTIOBJECTIVE OPTIMIZATION

Natalie Ramírez Carmona [γ]
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

Oswaldo García Salgado [ψ]
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

- **RESUMEN**: La publicación de Markowitz (1952), conocida como Teoría Moderna de Portafolios, sugiere que los inversionistas deben considerar el desempeño y el riesgo general para determinar la asignación de fondos entre alternativas de inversión. Sin embargo, debido a la complejidad del entorno financiero, el modelo propuesto en esta teoría sigue siendo muy relevante con diferentes extensiones, variantes y nuevos desarrollos, tanto en la academia como en la práctica. Este artículo comienza por describir los antecedentes de esta teoría, para posteriormente examinar y construir un análisis de diferentes enfoques de investigación incluyendo, entre otras, el uso de momentos de orden superior, nuevos procedimientos de optimización computacional y metodologías innovadoras para abordar las cuestiones de implementación. Este documento muestra un resumen temático y cronológico de los diferentes enfoques de la teoría de la cartera y los diversos desarrollos que han contribuido a la conceptualización del fenómeno del riesgo financiero.
- **PALABRAS CLAVE**: Optimización, Portafolio de inversión, Rendimiento, Riesgo

---

γ Alumna del Doctorado en Ciencias Económico-Administrativas en la Facultad de Economía de la Universidad Autónoma del Estado de México. Correo electrónico: natalie_raca@yahoo.com.mx

ψ Profesor-Investigador adscrito a la Facultad de Economía de la Universidad Autónoma del Estado de México. Correo electrónico: oswgars@gmail.com

Economía coyuntural, Revista de temas de coyuntura y perspectivas, vol.1, núm. 4., pp. 101- 144.

▪ **ABSTRACT:** The publication of Markowitz (1952), known as Modern Portfolio Theory suggests that investors should consider the performance and the overall risk to determine the allocation of funds between investment alternatives. However, due to the complexity of the financial environment, the model proposed in this theory is still very relevant with different extensions, variants and new developments, both in academia and in practice. This article begins by describing the background of this theory, then examining and constructing an analysis of different research projects including, among others, the use of higher order moments, new computational optimization procedures and innovative methodologies to address implementation issues. This document shows a thematic and chronological summary of different approaches to portfolio theory and the various developments that have contributed to the conceptualization of the phenomenon of financial risk.

▪ **KEYWORDS:** Investment Portfolio, Optimization, Return, Risk

▪ **CLASIFICACIÓN JEL:** C61, C65, G11, G24.

▪ Recepción: 20/10/2016 Aceptación: 21/11/2016

INTRODUCCIÓN

Los avances alcanzados a partir de 1950 en las Ciencias Económico-Administrativas, en la Investigación de Operaciones y en las Ciencias Computacionales, han sentado las bases para diversos estudios realizados en la actualidad. Muchos de estos avances no sólo han definido el desarrollo de las diferentes áreas, sino que también han impactado a las finanzas. Tal es el caso de Markowitz (1952), quien introdujo el concepto de optimización de portafolios fundamentando su modelo en el cálculo del rendimiento y del riesgo (media-varianza).

Los principios introducidos a través del modelo de Optimización Media-Varianza (OMV) se encuentran todavía en el núcleo de muchos enfoques modernos para la asignación de activos, análisis de inversiones, gestión de riesgos, presupuesto de capital, y la toma de decisiones bajo incertidumbre. Sin embargo, debido a aspectos como la complejidad, las vulnerabilidades y las incertidumbres relacionadas con el aumento globalizado de negocios y entornos financieros, el modelo de continua siendo altamente relevante.

La Teoría del Portafolio desarrollada por Markowitz (1952), propone que el inversionista debe abordar la cartera como un todo, estudiando las características de riesgo y el rendimiento global, en lugar de escoger valores individuales en virtud del rendimiento esperado de cada valor en particular. El modelo toma en consideración el rendimiento esperado y la volatilidad esperada, la volatilidad se trata como un factor de riesgo, y el portafolio se conforma en virtud de la tolerancia al riesgo de cada inversionista en particular, tras elegir el máximo nivel de rendimiento disponible para el nivel de riesgo escogido.

En la práctica existen diferentes extensiones, variantes y nuevos avances que proporcionan una nueva visión de los enfoques desarrollados para hacer frente a los problemas que se presentan al utilizar la Optimización de Media-Varianza (OMV) para la construcción del portafolio, incluyendo la inclusión de los costos de transacción, las limitaciones en la gestión de cartera, el uso de los momentos de orden superior, y la sensibilidad de las estimaciones de los rendimientos y las covarianzas. Existen, también, nuevas tendencias y desarrollos en el área, tales como los métodos de contracción, la inclusión de costos de transacción, la imposición de restricciones, el impacto del error de estimación, las medidas de diversificación, así como la optimización robusta, la incorporación de momentos superiores y diversos enfoques multioperacionales que incorporan el uso de nuevos modelos computacionales para el procesamiento de la información.

El objetivo de este trabajo consiste en mostrar parte de la investigación construida sobre la base de la Teoría de Selección de Portafolios de Markowitz

(1952), la importancia de este trabajo, radica en el hecho de que examina aproximaciones teóricas y metodológicas e identifica variables asociadas a la conformación de portafolios de inversión. A continuación se revisan algunos elementos del pasado y el presente de la Teoría del Portafolio y se exponen algunos modelos propuestos para analizar la relación existente entre el rendimiento y el riesgo de un portafolio determinado, lo cual además de ofrecer un marco general, provee herramientas y parámetros necesarios para la futura estimación. Para su comprensión el articulo está integrado por tres secciones, en la primera sección se exhibe como la conformación de portafolios de inversión era una práctica estudiada un poco antes de 1952. En el segundo apartado se presenta la teoría de selección del portafolio estructurada mediante un modelo de Optimización Media-Varianza que muestra como maximizar el rendimiento y minimizar el riesgo, mediante una adecuada elección de los activos que conforman un portafolio. En la tercera parte se refieren diversos enfoques asociados con el uso, y la optimización del portafolio desde las perspectivas académica y práctica.

1. DEL ANÁLISIS INDIVIDUAL A LOS PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN

La diversificación de las inversiones es una práctica estudiada un poco antes de 1952. Preliminar al trabajo de Markowitz (1952), los inversionistas solamente prestaban atención en como maximizar el nivel esperado de retornos. Por lo tanto el inversionista calculaba simplemente el grado esperado de rendimientos de un conjunto de activos y luego invertiría todo su dinero en aquel activo que le proporcionara la mayor rentabilidad esperada.

Uno de los trabajos más antiguos que contempla el análisis bursátil es el que publicaron Graham, Dodd y Cottle (1934), el cual realiza un análisis de los estados financieros de las empresas con la intención de establecer los criterios apropiados para la selección de bonos y acciones para propósitos de inversión.

Más adelante Hicks (1935) propone la Teoría Pura de la Inversión de Portafolios, la cual mostraba, la necesidad de una teoría mejorada del dinero y lo deseable de construir una teoría del dinero alineada con la teoría del valor . También discutía la existencia de fricciones tales como el costo de transferir activos e introducía el riesgo. Específicamente señalaba que el riesgo total en que se incurre cuando se efectúa más de una inversión riesgosa no tiene una relación con el riesgo que produce cada una de las inversiones en particular si se tomaran por separado.

Posteriormente Marschak (1938) construyo una Teoría de la Elección Bajo Incertidumbre. Suponía una dirección de preferencias en el espacio de parámetros de las distribuciones de probabilidades y a su vez expresó las preferencias por inversiones mediante curvas de indiferencia. También busco alcanzar una teoría del dinero mediante su integración con la Teoría General de los Precios expresando que para tratar los problemas de la inversión con las herramientas de una teoría económica se requería de una extensión del concepto de los gustos humanos y las condiciones de producción . El problema era explicar las cantidades objetivo de bienes mantenidos en cualquier punto del tiempo y los precios objetivo del mercado a los que se intercambian, dados los gustos y expectativas de los individuos en ese punto del tiempo. Al mismo tiempo Williams (1938) hacía la observación de que los dividendos futuros de una acción o el interés y el principal de un bono pueden ser inciertos. Decía que, en ese caso, se debían asignar probabilidades a los diversos valores posibles del título financiero y usar la media de esos valores como el valor del título financiero. Finalmente, aseguraba que invertir en varios títulos financieros de manera suficiente podía virtualmente eliminar el riesgo.

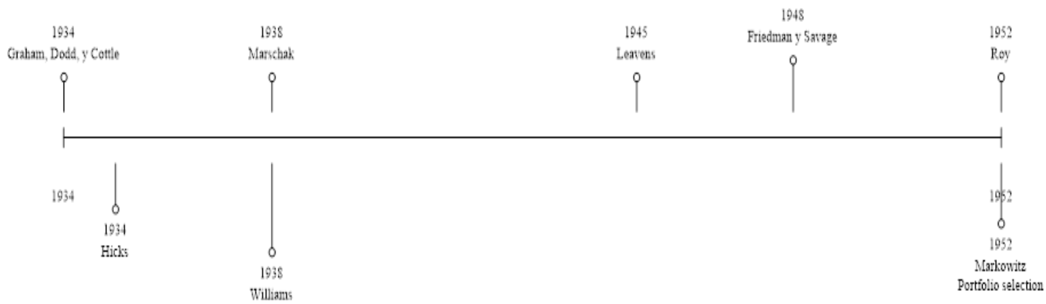
Más tarde Leavens (1945) mostraba los beneficios de la diversificación en el supuesto de que los riesgos son independientes, afirmaba que la diversificación entre compañías de una industria no puede proteger contra factores desfavorables que afectan a toda la industria; para ese propósito era necesaria una diversificación adicional. Tampoco puede la diversificación entre industrias proteger contra factores cíclicos que pueden deprimir simultáneamente a todas las industrias.

A continuación Friedman y Savage (1948) sugieren que una clase importante de las reacciones de las personas ante el riesgo puede ser racionalizada por un análisis de la curva de utilidad argumentado que la curvatura de la función de utilidad de un individuo difiere en función de la cantidad de la riqueza de la persona. Esta función de utilidad podría explicar por qué un individuo es amante del riesgo cuando tiene más riqueza y con aversión al riesgo cuando es más pobre.

Casi al mismo tiempo que Markowitz (1952) estableciera el punto de inicio de la Teoría del Portafolio, Roy (1952) analizo las contrariedades del problema de la elección bajo incertidumbre basado en la suposición de que es razonable para un individuo maximizar la ganancia esperada o ganancia en términos reales o de dinero. Definió tres objeciones a este enfoque. En primer lugar, el inversionista tiene que considerar los posibles resultados de un determinado curso de acción: la media. En segundo lugar, el principio de maximizar el rendimiento esperado no explica el fenómeno de la diversificación de los recursos entre una amplia gama de activos. Por ultimo una tercera crítica la encamina hacia el conocimiento impreciso del inversionista de conocer todos los posibles resultados de una determinada línea de acción, junto con sus respectivas probabilidades y por lo tanto es poco posible que el inversionista tenga mucha oportunidad para extender su conocimiento acerca de lo que el futuro le tiene reservado.

En la figura 1 se muestra la evolución de los autores y trabajos que consideraban el análisis individual de las acciones con base en lo referenciado en los párrafos anteriores.

Figura 1. Evolución de la investigación del análisis individual de acciones



Fuente. Elaboración propia

2. TEORÍA DEL PORTAFOLIO

La teoría de selección del portafolio se estructura mediante un modelo OMV y muestra como maximizar el rendimiento y minimizar el riesgo, mediante una adecuada elección de los activos que conforman un portafolio. Originada por Markowitz (1952), propone que el inversionista debe analizar el portafolio como un todo, estudiando las características del riesgo y del rendimiento global, en lugar de escoger valores individuales en virtud del rendimiento esperado de cada valor en particular.

La OMV considera un universo de inversión de n activos $S_1, S_2, \dots, S_n$ con rendimientos futuros inciertos $r_1, r_2, \dots, r_n$. Se denota por $r = [r_1, \dots, r_n]^T$ el vector de esos rendimientos. Un portafolio está representado por el vector de dimensión n, $\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]^T$ donde ω_i muestra la proporción de los fondos totales invertidos en el activo i. El rendimiento del portafolio r_p, depende linealmente de los pesos:

$$r_p\,(\omega) = \omega_1 r_1 + \cdots + \omega_n r_n = \omega^T r \tag{1}$$

Se denota por σ_i la desviación estándar de r_i, donde ρ_{ij} indica el coeficiente de correlación de los rendimientos de los activos S_i y S_j (para $i \neq j$) y Σ es la matriz (simétrica) de covarianza de los rendimientos de todos los activos, es decir:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Donde $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ y $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ (para $i \neq j$). Todas las matrices de covarianza validas son positivas semidefinidas (es decir $\omega^T\Sigma\omega \geq 0$, para todo ω), o equivalentemente la totalidad de sus valores propios son no negativos. Σ satisface la propiedad de ser definida positiva, conociendo que ($\omega^T\Sigma\omega > 0$, para todo ω). Esto es equivalente a suponer que ninguno de los activos $S_1, S_2, \dots, S_n$ puede perfectamente ser replicado por una combinación de los activos restantes. La suposición de que Σ es definida positiva, asegura que es una matriz invertible. Para un determinado portafolio ω, se puede calcular la varianza y la desviación estándar[8] de rendimiento como:

$$V(\omega) \quad = \quad \omega^T\Sigma\omega \tag{3}$$

[8] La desviación estándar del portafolio de rendimiento σ(ω) también es conocida como la volatilidad del portafolio, se utiliza con frecuencia como medida de riesgo.

$$\sigma(\omega) \quad = \quad \sqrt{\omega^T \Sigma \omega}$$

Sea Ω, un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que denota un conjunto de portafolios permisibles. En particular $\omega \epsilon \Omega$ significa que los pesos del portafolio deben cumplir con las restricciones impuestas.

Se representa al rendimiento esperado de los valores como:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

Donde $\mu_i = E(r_i)$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Utilizando esta notación, el problema OMV toma la forma,

$$\max_{\omega \epsilon \Omega} \mu^T \omega - \lambda \omega^T \Sigma \omega \tag{5}$$

Donde λ es un parámetro de aversión al riesgo que determina la compensación entre el rendimiento esperado y el riesgo del portafolio.

Las formulaciones alternativas del problema MVO se obtienen ya sea mediante la maximización del rendimiento esperado sujeto a un límite superior en la varianza del portafolio o minimizando la varianza con un límite inferior en el rendimiento esperado, es decir;

$$\begin{array}{ccc} \max\limits_{\omega \epsilon \Omega} \mu^T \omega & & \min\limits_{\omega \epsilon \Omega} \mu^T \omega \\ & \text{o} & \\ \omega^T \Sigma \omega \leq \sigma_{max}^2 & & \mu^T \omega \geq R_{min} \end{array} \tag{6}$$

Si el conjunto de restricciones sólo incluye la igualdad lineal y restricciones de desigualdad entonces el OMV es un programa cuadrático[9].

[9] Puede ser resuelto mediante el uso de un software estándar de optimización numérica. El software moderno optimización del portafolio también puede hacer frente a las restricciones

Este modelo no presentaba las fórmulas de las rectas que forman el conjunto de portafolios eficientes. Estas fórmulas se proporcionaron, posteriormente en Markowitz (1956), donde además, en esta segunda publicación se permitía que el analista de portafolios designara ninguna, algunas o todas las variables para que estuviesen sujetas a restricciones de no negatividad y las variables remanentes no estuvieran restringidas. Adicionalmente a la restricción presupuestal, el analista de portafolios podía especificar cero, una o más restricciones lineales de igualdad y/o restricciones lineales de desigualdad.

Después en Markowitz (1959), se explicaba la ley de la covarianza promedio, consideraba, entre otras cosas, qué pasa con la varianza de un portafolios igualmente ponderado cuando crece el número de inversiones. Demostraba que la existencia de rendimientos correlacionados tiene implicaciones importantes para la eficacia de la diversificación. Con rendimientos correlacionados, incluso con diversificación ilimitada, el riesgo puede permanecer sustancialmente. Específicamente, cuando crece el número de acciones, la varianza de un portafolio de igual ponderación se aproxima a la covarianza promedio[10].

3. TÉCNICAS DEL ANÁLISIS DEL PORTAFOLIO DE INVERSIÓN

El documento de Markowitz (1952), ha tenido un gran impacto no sólo en la investigación académica, sino también en el sector financiero. Cambió el análisis de las inversiones en valores individuales por la diversificación y

no lineales, tales como límites de riesgo o límites a las contribuciones de riesgo en grupos de valores, así como a las limitaciones con elementos discretos como el número de explotaciones o comercializa limitaciones. Tales formulaciones suelen resolverse mediante el uso de software que tiene la optimización cónica y capacidad de optimización de enteros

[10] La varianza del portafolios se aproxima al valor numérico obtenido al sumar todas las covarianzas y dividir este resultado entre el número de covarianzas

analizo el impacto de los valores individuales que conforman un portafolio en función de las características del riesgo y el rendimiento. En el marco de la OMV, los portafolios eficientes se forman por la elección de un activo justificada por su interacción con otros activos del portafolio, así como por su contribución al portafolio total, y no sobre la base de su desempeño autónomo.

A pesar de la sencillez de la teoría del portafolio, se necesitaron muchos años hasta que los administradores de portafolios comenzaron a utilizar la optimización para manejar dinero. En aplicaciones reales hay muchas preocupaciones asociadas con el uso, y la optimización del portafolio. En reconocimiento a estas inquietudes, el enfoque original sólo sirve como punto de partida, y el concepto de media-varianza suele extenderse en varias direcciones para la gestión del portafolio en la práctica.

3.1. Métodos de contracción

Diversos métodos de contracción se han utilizado para estimar las entradas de la OMV. En primer lugar Sharpe (1964) formula Modelo de Valoración del Precio de los Activos Financieros[11], (CAPM, por sus siglas en inglés) que se fundamenta en la determinación de los precios de los activos. En términos matemáticos, el rendimiento esperado, que se exige a cualquier activo riesgoso está dado por:

---

[11] El modelo comienza con una descripción del proceso mediante el cual las preferencias individuales y las relaciones entre otros activos interactúan para determinar una tasa de interés de equilibrio. Esto es seguido, por la afirmación de que de alguna manera una prima de riesgo de mercado también se determina, con los precios de los activos de ajuste para tener en cuenta las diferencias en el riesgo.
En el equilibrio, los precios de activos se han ajustado para que el inversor, si sigue los procedimientos racionales, sea capaz de obtener una mayor tasa de rendimiento esperada en sus tenencias solamente por incurrir en un riesgo adicional. En efecto, el mercado le presenta dos precios: el precio del tiempo y el precio del riesgo, es decir la rentabilidad esperada adicional por unidad de riesgo asumido.

$$E(R_i) = R_f + \beta_i E\left(R_M - R_f\right) \qquad (7)$$

Donde R_i es el rendimiento del activo i, R_f es la tasa libre de riesgo, R_m es el rendimiento del portafolio de mercado y $\beta_i = \frac{Cov\,(R_i, R_m)}{Var(R_M)}$.

El término $E\left(R_M - R_f\right)$ se denomina premio por riesgo de mercado, porque representa el rendimiento, por sobre la tasa libre de riesgo, que demandan los inversionistas para mantener el portafolio.

En segundo lugar, Roll y Ross (1980)[12] desarrollan el Modelo de Arbitraje de Precios (ATP, por sus siglas en inglés), considera que el rendimiento esperado de un activo financiero $\tilde{r}_i$ puede ser modelado como una función lineal de varios factores macroeconómicos, donde la sensibilidad a los cambios en cada factor es representada por un factor específico b_{ij}, esto es:

$$\tilde{r}_i = E_i + \sum_{i=1}^{k} b_{ij}\tilde{\delta}_j + \tilde{\epsilon}_i \qquad (8)$$

$i = 1, \ldots, n$

$j = 1, \ldots, n \; (k \ll n)$

Donde,

E_i: rendimiento esperado del activo i

[12] El APT es una alternativa que concuerda con el CAPM. El APT se basa en un proceso de generación de rendimiento lineal como un primer principio, y solo requiere los supuestos de utilidad más allá de la monotonía y la concavidad. Hay dos diferencias principales entre el APT y el CAPM. En primer lugar, el APT permite algo más que un factor de generación del rendimiento. En segundo lugar, el APT demuestra que desde cualquier equilibrio de mercado todo se caracteriza por una relación lineal entre la rentabilidad de cada activo esperado y el rango de su rendimiento de respuesta, o cargas, en los factores comunes.

$\tilde{\delta}_j$: factor común j

b_{ij}: coeficiente de sensibilidad de los rendimientos de activo i a las variaciones del factor común $\tilde{\delta}_j$

$\tilde{\epsilon}_i$: Componente no sistemático de riesgo del activo i (termino de ruido)

Dado un inversionista con un portafolio determinado, y que está planificando cambiarlo. El nuevo portafolio se diferenciará solamente por las proporciones invertidas en cada uno de los activos, es decir, los recursos utilizados en la adquisición de otros activos del portafolio, se obtienen de las ventas de activos del portafolio inicial. Entonces si x_i es la variación de la fracción del total de recursos o de la riqueza total invertida en el activo i se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \tag{9}$$

La cantidad de dinero invertida en el portafolio original y en el nuevo es la misma. Por su parte, los rendimientos adicionales que se pueden obtener por la alteración del portafolio de inversión está dada por:

$$\begin{aligned} x\tilde{r} &\equiv \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i E_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} x_i b_{ij} \tilde{\delta}_j + \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{\epsilon}_i \end{aligned} \tag{10}$$

$$\equiv \quad xE + \sum_{j=1}^{k} xb_j\tilde{\delta}_j + x\tilde{\epsilon}$$

Considerando un portafolio x bien diversificado, de modo que cada proporción de inversión x_i se del orden $1/n$ y que no contenga error no sistemático, entonces para cada j se tiene:

$$xb_j \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i b_{ij} = 0 \tag{11}$$

Entonces la variación de los rendimientos en el portafolio de arbitraje elegido esta dada por:

$$x\tilde{r} = xE \tag{12}$$

Debido a que el término $x\tilde{\epsilon}$ es desestimado por la aplicación de los grandes números, se elimina el riesgo no sistemático

Si el inversionista está satisfecho con su portafolio, es decir, no hay oportunidades de arbitraje para los portafolios de inversión formados por los activos, entonces el portafolio está en equilibrio, lo que conduce a:

$$xE = 0 \tag{13}$$

Es decir, ningún portafolio en equilibrio puede ser alterado sin comprometer recursos adicionales o incurrir en riesgo adicional. En términos algebraicos, esto significa que el vector de rendimientos esperados, será una combinación lineal del vector de sensibilidades a los factores y un vector de constantes, de la forma:

$$E_i = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_{ij} \tag{14}$$

Esta relación lineal entre el rendimiento esperado del portafolio y las sensibilidades a los factores es la conclusión central de la Teoría de Precios por Arbitraje, en que λ_i representa los premios por riesgo asociados a la variación en los factores del modelo. La Teoría de Precios por Arbitraje se rechaza si se cumple que todos los λ_i son cero, pues en este caso no existen premios por riesgo. Por otro lado, si existe un activo con rendimiento libre de riesgo, E_0, entonces $b_{0j} = 0$ y $E_0 = \lambda_0$, pudiéndose reescribir el modelo de la forma:

$$E_i - E_0 = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_{ij} \tag{15}$$

Por ultimo Black y Litterman (1992)[13] proponen un enfoque donde la estimación de los rendimientos esperados se calcula como un promedio ponderado del equilibrio del mercado y los puntos de vista del inversionista. Los pesos dependen de la volatilidad de cada activo, de sus correlaciones con los otros activos y del grado de confianza en cada pronóstico.

[13] El modelo se fundamenta en dos supuestos de mercado. En primer lugar los rendimientos esperados son muy difíciles de estimar y los inversores suelen tener puntos de vista sobre rentabilidades, por lo tanto los inversionistas deben aumentar sus puntos de vista con un conjunto de supuestos auxiliares, y las rentabilidades históricas que se utilizan para este propósito proporcionan guías pobres a los rendimientos futuros. En segundo lugar, los pesos de portafolio de activos óptimos y las posiciones de asignación de activos estándar son extremadamente sensibles a los supuestos por lo tanto la estimación no distingue puntos de vista de supuestos auxiliares, y la portafolio óptima, dada su sensibilidad a los rendimientos esperados, a menudo parece tener poca o ninguna relación con los puntos de vista del inversionista desea expresar.

El modelo asume que los rendimientos están distribuidos normalmente con media μ y matriz de covarianza Σ, es decir $r \sim N(\mu, \Sigma)$. Sin embargo μ es un vector distribuido normalmente, $\mu \sim (\pi, \Sigma_\pi)$, donde π es un vector de rendimientos de equilibrio de mercado. Estos supuestos encapsulan la idea de que los rendimientos esperados derivan de la precepción de un mercado de equilibrio. El vector del rendimiento esperado y el vector de rendimientos de equilibrio no son observables y tienen que ser estimados.

Un inversionista puede tener puntos de vista sobre todos o algunos de los valores. El inversionista expresa estas opiniones como $P\mu \sim N(q, \Omega)$. La matriz $P \epsilon \mathbb{R}^{k \times n}$ describe los puntos de vista de los inversionistas, el vector $q \epsilon \mathbb{R}^{k \times n}$ son los rendimientos esperados desde el punto de vista del inversionista (alfas), y Ω es la matriz de covarianza de los puntos de vista (confianza).

Es necesario estimar el mercado de equilibrio π. El enfoque estándar en el modelo es usar el CAPM, que es:

$$\begin{aligned} \pi_i &= E(R_i) - R_f \\ &= \beta_i\left[E(R_M) - R_f\right] \end{aligned} \tag{16}$$

$$\beta_i = \frac{Cov\ (R_i, R_m)}{\sigma_M^2}$$

Donde $E(R_i)$ es el rendimiento esperado para el activo i, $E(R_M)$ es el rendimiento esperado para el portafolio de mercado, R_f es la tasa libre de riesgo, β_i es la beta para el activo i, y σ_M^2 es la varianza del portafolio de mercado. Denotado por $\omega_b = (\omega_{b1}, \dots, \omega_{bn})$ el mercado de capitalización o de pesos de referencia se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \pi &= \begin{bmatrix} \pi_i \\ \vdots \\ \pi_n \end{bmatrix} \\ &= \delta\Sigma\omega \end{aligned} \tag{17}$$

$$\delta = \frac{E(R_i) - R_f}{\sigma_M^2}$$

Donde δ es el precio de mercado del riesgo. En este contexto π se refiere al vector de rendimientos implícitos esperados de mercado.

Los rendimientos esperados en el MBL están dados por la fórmula:

$$\hat{\mu}_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P^T\Omega^{-1}q]$$

$$\begin{aligned} M &\equiv Var(\hat{\mu}_{BL}) \\ &= [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1} \end{aligned} \tag{18}$$

Algunas observaciones proporcionan una mejor comprensión de la fórmula. En primer lugar, si el inversionista no tiene puntos de vista o de la confianza en las opiniones es cero (es decir,$q = 0$ ó $\Omega = 0$), entonces los rendimientos son iguales a los rendimientos de equilibrio, es decir $\hat{\mu}_{BL} = \pi$. En consecuencia, sin puntos de vista, el inversionista terminará es establecimiento de la portafolio de mercado. En segundo lugar, el modelo espera rendimientos que son una combinación lineal ponderada del mercado de equilibrio y los puntos de vista de los inversionistas, es decir:

$$\begin{aligned} \omega_\pi &= [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}(\tau\Sigma)^{-1} \\ \omega_q &= [(\tau\Sigma)^{-1} \\ &\quad + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}P^T(\tau\Sigma)^{-1} \end{aligned} \tag{19}$$

$$\text{y } \omega_\pi + \omega_q = 1$$

Específicamente, $(\tau\Sigma)^{-1}$ y $P^T(\tau\Sigma)^{-1}$ representan la confianza que se tiene en las estimaciones del equilibrio del mercado y los puntos de vista, respectivamente. Por lo tanto, si se tiene poca confianza en los puntos de vista, los rendimientos esperados estarán cerca de los implicados por el mercado de equilibrio. Por el contrario, con una mayor confianza en los puntos de vista, provocara que los rendimientos esperados se desvíen de los rendimientos esperados implícitos del equilibrio de mercado.

El modelo también se puede escribir en la forma:

$$\hat{\mu}_{BL} = \pi + \tau\Sigma\mathrm{P}^T[\mathrm{P}\tau\Sigma\mathrm{P}^T + \Omega]^{-1}[q - P\pi] \tag{20}$$

De esta expresión se ve que el alejamiento del está dado por un vector proporcional a $\Sigma\mathrm{P}^T[\mathrm{P}\tau\Sigma\mathrm{P}^T + \Omega]^{-1}[q - P\pi]$.

Probablemente una de las características más importantes del MBL es que se ajusta todo el equilibrio del mercado implícito en el vector rendimiento esperado con los puntos de vista del inversionista. Debido a que los rendimientos están correlacionados, los puntos de vista respecto a algunos activos, implicarán cambios en los rendimientos esperados de todos los activos. Matemáticamente, esto se deduce del hecho de que, aunque el vector q pueda tener dimensión $K \ll N$, $P^T\Omega^{-1}P$ es una matriz $N \times K$ que propaga los K puntos de vista en N componentes $P^T\Omega^{-1}Pq$. Este efecto es más fuerte cuanto más se correlacionan los distintos valores. En ausencia de este ajuste del vector rendimiento esperado, las diferencias entre el equilibrio de rendimiento esperado y las previsiones de un inversionista se interpretarán como una oportunidad de arbitraje por un optimizador de media-varianza que resultara en portafolios concentrado en pocos activos.

Muchas estrategias no pueden ser fácilmente convertidas en los pronósticos de rendimientos y covarianzas esperados. En particular, las estrategias no pueden producir puntos de vista sobre rendimiento absoluto, sino simplemente ofrecen una perspectiva de clasificación de valores que se predicen para superar otros valores. Un supuesto que subyace a este modelo es que el rendimiento esperado de un activo debe ser coherente con el equilibrio del mercado.

3.2. Inclusión de los costos de transacción

El objetivo del portafolio es encontrar un equilibrio óptimo entre rendimiento y riesgo. Tradicionalmente, esto se hizo con independencia de los costos de transacción, como el control y la gestión de los costos de negociación. Este enfoque a menudo apunta a las participaciones del portafolio que incurren en grandes costos de negociación, en algunos casos tienen un impacto severo en la rentabilidad ajustada al riesgo. Mediante la incorporación directa de los costos de transacción en el proceso de asignación, los portafolios resultantes son más rentables y muestran una mejora en términos de rentabilidad ajustada al riesgo. En ocasiones la presencia de costos de transacción hace que el problema de optimización del portafolio sea de difícil solución en un entorno dinámico.

En este contexto Baule (2010), plantea una aplicación de la teoría de selección del portafolio, en la cual el pequeño inversionista se enfrenta a algunos problemas, debido a los costos de transacción en forma de comisiones bancarias. En particular, los honorarios, obligan a los inversionistas a elegir una pequeña selección de los activos, por lo tanto la existencia de costos de transacción conduce a un problema de optimización que asocia los costos de riesgo que surgen con los portafolios que constan de pocos activos. Algo parecido sucede con Zhang, Zhang y Xu (2010), quienes proponen un modelo de tolerancia al riesgo con costos de transacción para un portafolio de ajuste basado en la teoría de los momentos, desarrollan un modelo de optimización secuencial para encontrar el portafolio óptimo y presentan un método para estimar las distribuciones de probabilidad de los rendimientos de los activos. De manera semejante Brown y Smith (2011), proponen un modelo que considera la aversión al riesgo, las restricciones del portafolio, los rendimientos esperados y los costos de transacción. El problema se formula como un programa dinámico estocástico, en el que los costos de transacción son distintos de cero y la dimensión del espacio solución que se presenta es tan grande como el número de activos.

3.3. Imposición de restricciones

A partir de los primeros trabajos sobre el tema, la mayoría de las formulaciones de la OMV presentaron una serie de limitaciones. Uno de los atractivos de la OMV en la construcción cuantitativa del portafolio es la flexibilidad para la incorporación de múltiples restricciones que reflejan numerosos comportamientos. Esta flexibilidad permite personalizar los portafolios de acuerdo a las diferentes necesidades y las propensiones al riesgo.

En primera instancia las restricciones de regulación, reflejan las limitaciones impuestas por los reguladores del mercado, acorde con lo anterior, Abad y León (2015) analizan las implicaciones que tienen en la diversificación del riesgo las limitaciones de regulación de mercado, tales como las restricciones a las ventas en corto; a partir de la agregación de mercados por continentes. Los resultados obtenidos muestran que conforme aumenta el número de índices en los que se puede invertir y disminuyen las restricciones; el riesgo soportado para un mismo nivel de rentabilidad es menor. Como tales restricciones son inflexibles, deben ser respetadas en todo momento, incluso si limitan la capacidad para agregar valor al portafolio a través de la selección y colocación de activos.

En segundo lugar las restricciones de orientación, pueden especificar ciertas limitaciones a las posiciones del portafolio. Por ejemplo Musto, Semeraro, Lops et al. (2015), proponen un marco para la recomendación de estrategias de asignación de activos que combina el razonamiento basado en casos con una estrategia de diversificación para apoyar la tarea de personalizar portafolios de inversión de acuerdo a las necesidades de los inversionistas. Las restricciones de orientación se consideran inflexibles y no pueden ser violadas sin el consentimiento del cliente.

En tercer término las restricciones de exposición, se originan del deseo de limitar la selección a ciertos activos, o grupos de activos como los de una determinada industria, sector o país. Del mismo modo se puede querer limitar la exposición a activos con ciertas características, tales como la capitalización pequeña o de gran mercado, alto o bajo nivel de apalancamiento o liquidez, o la exposición de factores cuantitativos comunes tales como el valor y el impulso. Bajo esta perspectiva, Aiken, Clifford y Ellis (2015) analizan los fondos de cobertura que impusieron restricciones discrecionales de liquidez (RDL, por sus siglas) a las acciones de los inversionistas durante la crisis financiera. Las RDL prolongan la vida del fondo, pero imponen costos de liquidez a los inversionistas. Aparentemente, los fondos establecen RDL para limitar los retiros en función de resultados que podrían obligar a las ventas de activos sin liquidez. Sin embargo, después de que restringe la liquidez de los inversionistas, los fondos de RDL no reducen las ventas de valores ilíquidos y el desempeño es inferior para una muestra de control de los fondos. En consecuencia, las RDL afectan negativamente la reputación de la familia de fondos.

En cuarto sitio las restricciones de gestión al riesgo suelen limitar la volatilidad del portafolio, ya sea en un sentido absoluto o con respecto a un punto de referencia. Además, las contribuciones del riesgo de activos o grupos de valores individuales pueden ser restringidas. Tales restricciones son útiles para fines de presupuestación del riesgo, y para la asignación del riesgo a través de las diferentes regiones geográficas o diferentes factores de riesgo en un portafolio de renta variable. Así por ejemplo Rosen y Saunders (2010) determinan el riesgo global para posiciones (instrumentos y sub-portafolios), tomado como punto de referencia las contribuciones marginales de los factores de riesgo que proporcionan y pueden ser vistas como coberturas de la pérdida.

Por ultimo las restricciones de los pesos del portafolio imponen límites para evitar los pesos extremos que puedan derivarse en inexactitudes del modelo. Para comprender mejor Jagannathan y Ma (2003) muestran que hay restricciones de venta corta que son equivalentes a la reducción de las covarianzas estimadas de activos, mientras que los límites superiores son equivalentes a aumentar las covarianzas correspondientes. Por ejemplo, las acciones que tienen altas covarianzas con otras poblaciones tienden a recibir pesos negativos del portafolio. Por lo tanto, cuando se disminuye su covarianza estos pesos negativos disminuyen en magnitud. Del mismo modo, las acciones que tienen covarianzas bajas con otras poblaciones tienden a ser más ponderadas. Por lo tanto, el aumento de las covarianzas correspondientes hace que el impacto de estas poblaciones con sobrepeso disminuya. Sin embargo, se debe poner cuidado extremo al imponer restricciones a efectos de robustez y estabilidad. Por ejemplo, si las restricciones utilizadas son demasiado justas, la asignación del portafolio será determinado por completo por las restricciones en lugar de hacerlo por los rendimientos esperados previstos y sus covarianzas.

3.4. Coeficiente de transferencia

La capacidad de medir el impacto de las restricciones sobre el desempeño de la portafolio ha sido analizado por Clarke, De Silva y Thorley (2002) quienes introdujeron el concepto del coeficiente de transferencia, definido como el coeficiente de correlación transversal entre los pesos ajustados por riesgo en un portafolio optimizado y los rendimientos pronosticados ajustados al riesgo (alfas) para los valores correspondientes. La definición del coeficiente de transferencia, es conceptualizado, mediante la afirmación de que las asignaciones de peso ajustadas por riesgo óptimo sin restricciones son proporcionales a los rendimientos pronosticados ajustados al riesgo cuando se asume que los rendimientos no están correlacionados.

3.5. Desalineación de las restricciones

En una contribución Karels y Sun (2013) observan que la optimización del portafolio activo, tiene tres componentes principales: los pronósticos de rendimiento (alfas), un pronóstico de riesgo del portafolio y un parámetro de aversión al riesgo. Las discrepancias entre los componentes pueden conducir a sesgos no deseados o a inconsistencias entre los factores resultantes. Técnicamente, el pronóstico de riesgo y de rendimiento está desalineado cuando el alfa no se puede escribir como una combinación lineal de los factores de riesgo. Por lo tanto, hay una parte de alfa alineada con los factores de riesgo y una parte residual de alfa que es ortogonal a la parte alineada.

Dependiendo de la interpretación, la desalineación debe ser tratada de manera diferente ya sea enfocándose en el modelo de riesgo, en el proceso de optimización o en la adición de un factor. Los modelos de restricciones desalineadas demuestran que cuando el alfa contiene factores que no tienen un precio por riesgo, el proceso de optimización genera portafolios que ofrecen rendimientos superiores sin contemplar los riesgos que incurren. La presencia de este tipo de oportunidades hace que el proceso de optimización sea inestable y los portafolios resultantes tienen la propiedad de que el riesgo del portafolio sea significativamente bajo. Al asegurar que el factor alfa y el factor de riesgo están alineados correctamente, o que todos los factores alfa son capturados en el modelo de riesgo y así se pueden evitar algunos de los problemas que surgen de la desalineación.

3.6. Impacto del error de estimación[14]

En un contexto de optimización del portafolio Kolm, Tütüncü y Fabozzi (2014) afirman que los activos con grandes rendimientos esperados y desviaciones estándar bajas están sobrevalorados en comparación con sus pesos de referencia. Por el contrario, los valores con rendimientos esperados bajos y desviaciones estándar altas están subvalorados. Considerando el escenario donde los rendimientos esperados, las covarianzas y los errores de estimación se distribuyen al azar con media cero, significa que algunas cantidades se están sobrestimando y algunas se están subestimando. El proceso de optimización asignará pesos superiores a los activos con rendimientos esperados sobrestimados y riesgos subestimados, y

[14] Algunos autores se refieren a los optimizadores como maximizadores del error

simétricamente, los pesos inferiores a los valores con rendimientos esperados subestimados y riesgos sobreestimados. Cuanto mayor sea el error de estimación, mayor será el impacto en los pesos optimizados.

De manera semejante Kritzman (2006) sostiene que el impacto de pequeños errores de estimación en los pesos de portafolio pueden ser significativos cuando algunos activos son sustitutos. A menudo los optimizadores de media-varianza son maximizadores del error porque los pequeños errores de entrada conducen a grandes errores de salida. En muchos casos, esto se debe a una mala interpretación de los insumos. Para demostrar lo anterior se considera la optimización de los activos que tienen rendimientos esperados similares y similares niveles de riesgo, así como activos que tienen diferentes rendimientos esperados y diferentes niveles de riesgo, como resultado se obtiene que los errores de las estimaciones tendrán alto impacto en las asignaciones óptimas ya que la distribución de rendimiento cambia cuando los pesos óptimos están cambiando. Usando esta observación los optimizadores de media-varianza suelen ser robustos para la estimación de los errores ya que su sensibilidad se mide en el espacio de soluciones del portafolio de rendimiento a diferencia de pesos de portafolio.

3.7. Medidas de diversificación

En algunos casos se sugiere el uso de indicadores de diversificación que miden la concentración del portafolio. Estos indicadores de diversificación pueden ser utilizados como restricciones en la fase de construcción para limitar la concentración de valores individuales. Así Frahm y Wiechers (2011) introducen una medida de diversificación de portafolio que comprenden los activos de riesgo. Esta medida aplica la varianza más pequeña posible de entre los activos de la varianza total de la portafolio, produciendo la parte del riesgo que no es diversificable, en consecuencia la selección fundamentada en el análisis de concentración conduce a una mejor diversificación del portafolio de asignación.

3.8. Optimización robusta

La metodología de optimización robusta hace referencia a la modelación de problemas de optimización con incertidumbre en los datos de tal manera que con este algoritmo es posible encontrar una solución que sea satisfactoria para la mayoría de los parámetros. Los conjuntos de incertidumbre que contienen posibles valores para los parámetros se utilizan para describir la incertidumbre del problema y su tamaño representa el nivel de incertidumbre o el nivel deseado de robustez.

Goldfarb y Iyengar (2003) muestran cómo formular y resolver problemas de selección robusta de portafolio. El objetivo de estas formulaciones es combatir la sensibilidad del portafolio óptimo a errores estadísticos y de modelación en las estimaciones de los parámetros de mercado pertinentes. Introducen también el concepto de estructuras inciertas para los parámetros de mercado y demuestran que la optimización robusta de problemas de selección portafolio correspondientes a estructuras de incertidumbre[15] pueden ser reformulados como programas de segundo orden. Una vez que se definen las estructuras de incertidumbre, el problema de optimización robusta de portafolio está formulado con una perspectiva de confrontación. En este contexto, el objetivo del inversionista es elegir un portafolio que maximiza la utilidad.

[15] Las estructuras de incertidumbre corresponden regiones de confianza asociadas con los procedimientos estadísticos utilizados para estimar los parámetros de mercado

3.9. Incorporación de momentos superiores

La OMV es un caso donde se supone que los inversionistas tienen utilidad cuadrática y la distribución de rendimiento es normal[16], esto es una limitante ya existen tantas distribuciones de rendimiento financiero que no son normales, a que exhiben colas gruesas y comportamientos asimétricos que no se pueden describir solo por su media y varianza. En muchos casos, la distribución de rendimiento afecta significativamente el rendimiento del portafolio. Esto llevó a la introducción de las llamadas medidas de orden superior de riesgo, por ejemplo Li (1999) presenta un enfoque alternativo para el cálculo del VaR en el que se utiliza de forma explícita el sesgo y la curtosis, así como la desviación estándar. La estimación se construye sobre la base de la teoría de la estimación de las funciones. El resultado final muestra cómo el intervalo de confianza se ve afectado por la desviación estándar, asimetría y curtosis.

Dada la potencia de cálculo disponible en la actualidad es posible construir portafolios que maximizan la utilidad esperada bajo la distribución empírica del rendimiento de los activos y mediante la incorporación de la asimetría. Sin embargo en la práctica este enfoque se utiliza raramente. Al respecto Zuluaga y Cox (2010) realizan un trabajo que afirma que los rendimientos de los activos no se distribuyen normalmente, situación que ha motivado el uso de la asimetría en el contexto de una óptima asignación de portafolio de riesgo rendimiento. En su estudio se propone una metodología basada en optimización con restricciones de probabilidad que permite

[16] En este sentido, la medida de riesgo más conocida, es el Valor en Riesgo (VaR, por sus siglas en inglés) desarrollado por Morgan (1996) y puesto a disposición a través del software RiskMetrics

modelar la asimetría de los portafolios en la frontera eficiente de media-varianza.

Posteriormente Flores, Flores y Paredes (2014) incorporan el efecto de la asimetría para la selección de los activos y la integración un portafolio de inversión. La metodología que se utiliza plantea un problema de optimización multiobjetivo, que selecciona el portafolio de inversión que logra la optimización simultánea de la media, varianza y asimetría. Los resultados muestran que es posible disminuir la probabilidad de rendimientos negativos y pérdidas en el caso de seleccionar el portafolio con mayor asimetría positiva. El modelo valida todas las posibilidades de selección del nivel de aversión al riesgo, rendimiento y asimetría, el enfoque tiene la ventaja de ser flexible y la selección de los activos se expresa de forma matemática en un espacio definido por la varianza, la expectativa de rendimiento y su asimetría.

3.10. Métodos que usan el riesgo y no el rendimiento

Uno de los objetivos más importantes de la administración de portafolios es la diversificación de las fuentes de rentabilidad y de riesgos. Para lograr portafolios diversificados se incluyen métodos que hacen uso de un modelo de riesgo, pero no de un modelo de rendimiento.

En primer lugar en el trabajo realizado por Maillet, Tokpavi y Vaucher (2015) la asignación se basa en el riesgo del Portafolio de Mínima Varianza Global (GMVP, por sus siglas en ingles). El GMVP se calcula utilizando la matriz de covarianza de la muestra[17], y utilizando un enfoque que introduce una regla para inversionistas que deseen invertir en un portafolio con una sólida trayectoria histórica, pero que al mismo tiempo buscan hacer robusto el parámetro de incertidumbre. Bajo esta perspectiva la construcción del

[17] Que tiende a ser afectada negativamente por la incertidumbre de los parámetros

portafolio tiene como objetivo construir portafolios donde el riesgo global del portafolio está diversificado asignando el riesgo por igual en las diferentes estrategias.

En segundo término, otro de los conceptos importantes en la administración del portafolio cuantifica el riesgo de los componentes individuales respecto al riesgo total del portafolio. Hay diferentes maneras de definir la contribución del riesgo de una posición individual a un portafolio. Como muestra, Glasserman (2005) considera el problema de descomponer el riesgo de un portafolio en una suma de contribuciones de riesgo asociados a transacciones individuales, donde cada contribución marginal de riesgo es la pérdida esperada condicionada a una pérdida para la portafolio completa.

En última instancia el enfoque de portafolios igualmente ponderados[18] (EW, por sus siglas en inglés) permite a los inversionistas apuntar a niveles específicos de riesgo y que este sea dividido por igual en todo el portafolio de inversiones con el fin de lograr la diversificación del portafolio óptimo para cada inversionista individual. Las estrategias de paridad de riesgos están en contraste con los métodos tradicionales de asignación que se basan en la determinación de un porcentaje para las clases de inversión. Para ilustrar esto Pae y Sabbaghi (2015) proporcionan una prueba analítica para explicar por qué un portafolio igualmente ponderado tiene mayor rentabilidad y volatilidad que otros portafolios con las mismas acciones.

[18] Otro enfoque de la administración del portafolio que se basa en apuntar a los niveles de riesgo a través de los distintos componentes de un portafolio de inversiones

3.11. Optimización Multiperíodo

La elección de un portafolio para un solo período no es óptima, ya que no se captan efectos intertemporales del mercado. El rendimiento pronosticado y el comportamiento del mercado dan lugar a demandas donde el inversionista buscar ir más allá del próximo período a la hora de asignar de manera óptima los valores. En general, si el intercambio se realiza de forma rápida el impacto del mercado es mayor y si se negocia un portafolio en un período de tiempo más largo, a continuación, debido a la volatilidad de los precios existe la posibilidad de que los precios de los activos se comporten de manera adversa.

El objetivo de la optimización del portafolio es encontrar un equilibrio óptimo entre rendimiento y riesgo. Tradicionalmente, esto se hizo de forma independiente de la compensación asociada con el intercambio temporal. Sin embargo, esto a menudo conducirá a portafolios que incurren en grandes costos de impacto de mercado. En este contexto Calafiore (2008) analiza los problemas de decisión secuencial multiperíodo de asignación de activos financieros. Propone un modelo en el que los ajustes óptimos de portafolio se determinan con el objetivo de minimizar una medida de riesgo durante el horizonte de inversión al mismo tiempo que satisface las limitaciones del portafolio en cada período y que alcanzan o superan un rendimiento terminal esperado.

Posteriormente Davari, Aminnayeri y Seifi (2015) desarrollan un modelo de optimización de portafolio de múltiples periodos que utiliza opciones para mitigar el riesgo de mercado en un entorno dinámico. Debido al papel clave de las decisiones de inversión, se propone un nuevo método que toma la estructura de dependencia de los diferentes rendimientos de los activos, y también considera las correlaciones de seriales de cada uno de los rendimientos de los activos.

3.12. Optimización Multiobjetivo

Para simular las transacciones reales en los mercados financieros, los criterios de decisión deben ser múltiples al momento de seleccionar el portafolio de inversión. Desde la contribución de la teoría de la selección del portafolio, se han propuesto varias herramientas y procedimientos para hacer frente al intercambio entre rentabilidad-riesgo.

Según Contreras, Misa y Murillo (2008) una perspectiva eficaz para modelar las propiedades del portafolio con la proporción de cada activo se puede obtener por medio los modelos de lógica difusa, los cuales involucran la selección y sintonización de varios parámetros a partir de datos experimentales de entrada y salida. En particular Liu, Zhang y Xu (2012) estudian el problema de selección de portafolio para varios periodos en un ambiente difuso considerando algunos criterios como los costos de transacción, el riesgo y la asimetría de la portafolio, de esta manera el problema se extiende a un modelo de optimización dinámica el cual es resuelto por medio de un algoritmo genético. Así mismo Liu, Zhang y Zhang (2013) analizan un problema de optimización de portafolio multiperíodo donde el retorno, el riesgo y la liquidez de los activos se representan mediante variables de intervalo con el objetivo de maximizar la riqueza terminal bajo ciertas restricciones. En el modelo propuesto, una porción de la entropía se emplea para medir el grado de diversificación del portafolio. Usando la teoría de toma de decisiones difusa y un enfoque de programación multiobjetivo, el modelo propuesto se transforma en un problema de programación no lineal que es resuelto por un modelo de optimización de enjambre de partículas.

Otra forma para analizar el portafolio de acuerdo con Johnson (2000) es a través de proyectar las volatilidades de un activo por medio de técnicas econométricas denominados modelos generalizados autorregresivos de heteroscedasticidad condicionada (GARCH). Acorde con lo anterior Mendes, Paiva, Peruchi et al. (2016) proponen un procedimiento de sintonización para encontrar los parámetros de articulación que son desconocidos para posteriormente encontrar una portafolio óptimo a partir de las series de tiempo de los rendimientos y riesgos modelados por técnicas ARMA-GARCH. De igual manera Luo, Seco y Wu (2015) comparan los rendimientos de los portafolios óptimos utilizando el modelo GARCH Ortogonal (OGARCH). El rendimiento de cada portafolio óptimo se compara en un periodo fuera de muestra y se observa que el modelo da el mejor portafolio óptimo realizado con el mayor ratio de Sharpe y el riesgo más bajo. Por otro lado, se realiza un análisis de sensibilidad para los parámetros y se muestra que los pesos de activos en los portafolios óptimos son muy sensibles a pequeños cambios en los parámetros de entrada. Igualmente Miralles, Miralles y Miralles (2013) examinan la relación entre diferentes empresas, utilizan una combinación de modelos GARCH multivariantes como puntos de referencia para el seguimiento del rendimiento, los resultados muestran la existencia de una diferencia significativa en la transmisión de volatilidad cuando el comportamiento es asimétrico y cundo se consideran los cambios estructurales.

Un enfoque múltiple para una gestión eficaz de los riesgos incluye el empleo de estrategias tales como, la diversificación entre diferentes mercados, la decisión de ir a posiciones largas o cortas de los activos que componen la portafolio, la tolerancia al riesgo y la distribución de cómo el riesgo se distribuye a través clases de activos que constituyen la portafolio, todos los aspectos anteriores regidos por las preferencias de los inversionistas y los presupuestos de capital. Sin embargo, la inclusión de tales objetivos y limitaciones convierte el modelo en un complejo problema de resolución directa utilizando métodos analíticos, por lo tanto surge la necesidad de buscar soluciones metaheurísticas. Hoy en día existen nuevos métodos de optimización de portafolios que utilizan técnicas de computación evolutivas que permiten encontrar una combinación óptima para predecir y clasificar con mayor precisión.

Quintero (2004) manifiesta que la evolución diferencial (DE, por sus siglas en inglés) mantiene una población determinista de soluciones candidatas, las cuales se recombinan y mutan para producir nuevos individuos los cuales serán elegidos de acuerdo al valor de su función de desempeño. Lo que caracteriza esta técnica es el uso de vectores de prueba, los cuales compiten con los individuos de la población actual a fin de sobrevivir .Teniendo esta técnica como fundamento Schlottmann y Seese (2004), proponen un método heurístico híbrido que combina métodos multiobjetivo de búsqueda local de evolución diferencial y problemas específicos para apoyar el análisis de riesgo-rendimiento de los portafolios. El objetivo es calcular aproximaciones eficientes respecto al rendimiento y el riesgo y mediante la imposición de restricciones de presupuesto de capital. Los resultados indican que el método híbrido es superior en velocidad de convergencia a un enfoque evolutivo y encuentra aproximaciones de portafolios eficientes de riesgo-rendimiento en un plazo razonable. De igual manera Pai y Michel (2014) presentan una solución metaheurística a un problema de optimización de portafolio de futuros que combina varias clases de activos, como los índices de acciones, bonos y monedas, con limitaciones de riesgo y capital impuestas a cada una de las clases de activos. En ausencia de trabajos relacionados y teniendo en cuenta la complejidad del problema de optimización restringida no lineal multiobjetivo, se utilizan dos estrategias, la de evolución multiobjetivo y la de evolución diferencial multiobjetivo.

Por otro lado Izaurieta y Saavedra (2000) explica que las redes neuronales (NN, por sus siglas en inglés) son una técnica de procesamiento inspirado en la forma en que funciona el sistema nervioso de los animales. Se trata de un sistema de interconexión de neuronas que colaboran entre sí para producir un estímulo de salida. En el contexto de esta técnica Fernández y Gómez (2007) aplican un enfoque basado en redes neuronales artificiales con el fin de trazar la frontera eficiente asociada al problema de selección de portafolio. Consideran una generalización del modelo de media-varianza y ciertas restricciones garantizan que la inversión en un número determinado de activos limita la cantidad de capital que se invierte en cada uno. De igual manera Yu, Wang y Lai (2008) formulan un modelo de red neuronal basado en la media, la varianza y la asimetría para hacer una selección óptima de portafolio para lo cual se integraron diferentes estrategias de operación, así como las preferencias de riesgo de los inversionistas.

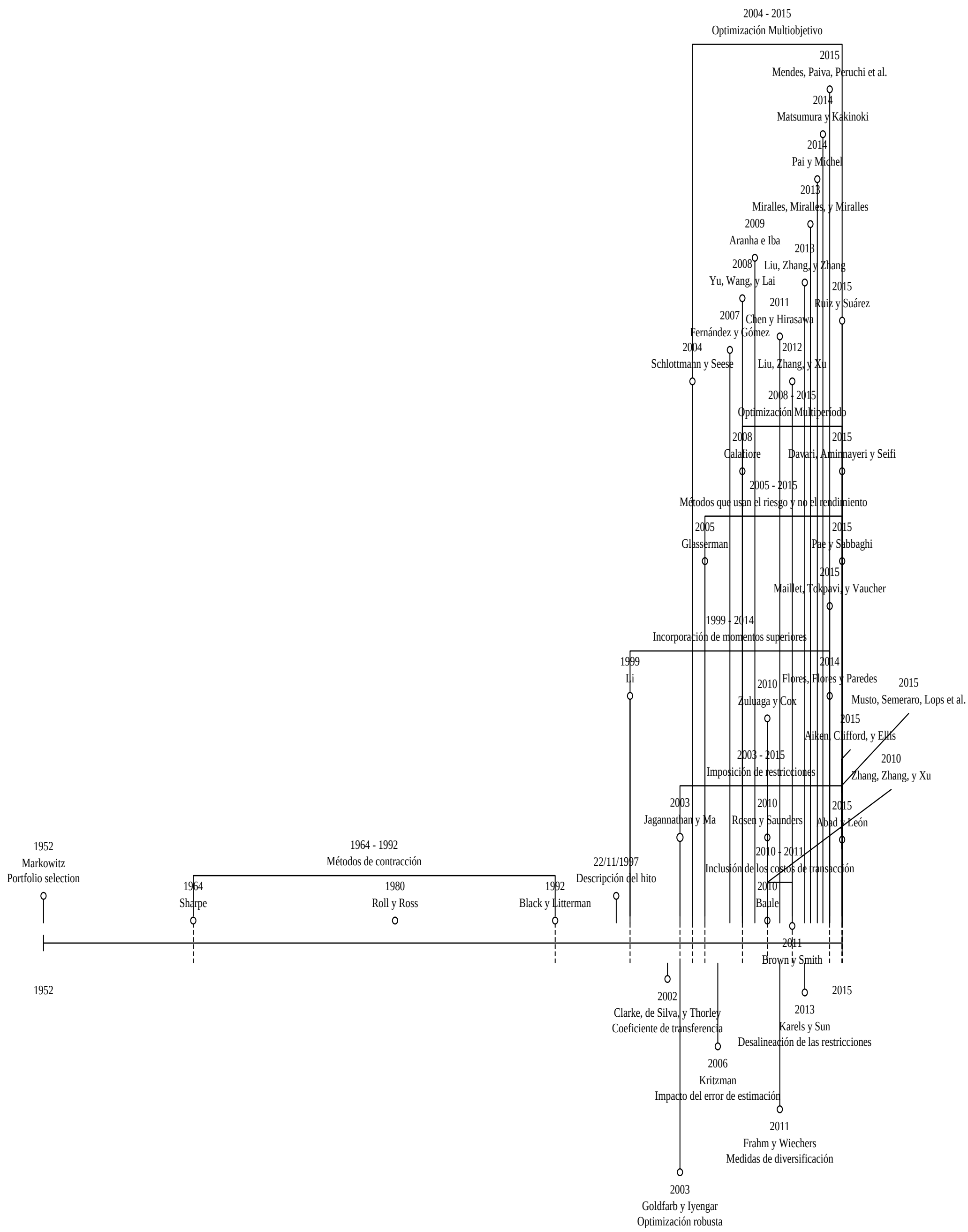
De acuerdo con Moujahid, Inza y Larrañaga (2008) un algoritmo genético (GA, por sus siglas en inglés) se inspira en la evolución biológica y su base genético-molecular. Esta técnica hace evolucionar una población de individuos sometiéndola a acciones aleatorias semejantes a las que actúan en la evolución biológica, así como también a una selección de acuerdo con algún criterio, en función del cual se decide cuáles son los individuos más adaptados, que sobreviven, y cuáles los menos aptos, que son descartados. Con base en la técnica antes descrita Chen y Hirasawa (2011) utilizan los métodos de algoritmos genéticos para encontrar el portafolio más eficiente. El modelo considera el coeficiente de correlación para evaluar las relaciones entre los activos y posteriormente generar el portafolio óptimo. El modelo propuesto proporciona un análisis exhaustivo de los resultados y otorga resultados más confiables. En un caso similar Matsumura y Kakinoki (2014) determinan una combinación óptima de activos que constituyen una portafolio y calculan la tasa de inversión utilizando un algoritmo genético multiobjetivo que optimiza la estrategia comercial. Cuando se llevó a cabo la evaluación del desempeño el sistema encontró que es posible obtener beneficios estables utilizando una combinación de activos de bajo riesgo y el sistema también fue capaz de darse cuenta de inversiones de bajo riesgo en todos los períodos de prueba.

Por último, Moscato y Cotta (2003) afirman que los algoritmos meméticos (MA, por sus siglas en inglés) son técnicas de optimización que combinan conceptos tomados de otras metaheurísticas, tales como la búsqueda basada en poblaciones, y la mejora local. Teniendo como sustento esta técnica, Aranha y Iba (2009) utilizan un algoritmo memético para la optimización del portafolio. El sistema se basa en una representación estructural que selecciona los activos del mercado, establece relaciones entre ellos, y asigna una función de escalada local que utiliza la información disponible para calcular los pesos de los activos seleccionados. De manera semejante Ruiz y Suárez (2015) mediante un enfoque memético abordan el problema de selección del portafolio óptimo. El marco utilizado es una extensión del modelo de Markowitz que incorpora restricciones, como los límites superior e inferior para la inversión en activos individuales y grupos de activos, y restricciones comerciales Se utiliza un algoritmo en el cual los portafolios se codifican utilizando una representación del conjunto para manejar los elementos combinatorios del problema de optimización.

En esta revisión se abordan algunos de los aspectos relacionados con la optimización del portafolio destacando algunas nuevas tendencias y exponiendo algunos trabajos de la literatura reciente sobre optimización multiobjetivo. Como síntesis de la revisión anterior se muestra la figura 2 en donde se observan las tendencias, los autores y las fechas de publicación de diversos trabajos.

Para finalizar la indagación teórica, se presenta en la tabla 1 un resumen de los diferentes enfoques metodológicos en los que la Teoría de Portafolios ha tenido diferentes enfoques de análisis y modificaciones, que han permitido complementar el análisis inicial planteado por Markowitz (1952).

Figura 2. Evolución de la investigación del portafolio de inversiones



Fuente. Elaboración propia

Tabla 1. Resumen de los principales enfoques metodológicos que complementan la Teoría de selección de Portafolios.

Enfoque	Año	Autor	Descripción
Antecedentes de la Teoría de Portafolios de Inversión	1934	Graham, Dodd, y Cottle	Análisis bursátil a partir de los estados financieros
	1935	Hicks	Teoría pura de la inversión de portafolios
	1938	Marschak	Teoría de la elección bajo incertidumbre
	1938	Williams	Inversión en diversos títulos
	1945	Leavens	Beneficios de la diversificación
	1948	Friedman y Savage	Reacción de las personas ante el riesgo
	1952	Roy	Análisis del problema de la elección bajo incertidumbre
Desarrollo de la Teoría de Portafolios de Inversión	1952	Markowitz	Teoría del portafolio
	1956	Markowitz	Restricción presupuestal
	1959	Markowitz	Ley de la covarianza
Métodos de contracción	1964	Sharpe	Valoración del Precio de los Activos Financieros
	1980	Roll y Ross	Modelo de Arbitraje de Precios
	1992	Black y Litterman	Estimación de los rendimientos esperados se calculados como un promedio del equilibrio del mercado y los puntos de vista del inversionista
Inclusión de los costos de transacción	2010	Baule	El inversionista se enfrenta a algunos problemas, debido a los costos de transacción en forma de comisiones bancarias
	2010	Zhang, Zhang, y Xu	Modelo de tolerancia al riesgo con costos de transacción
	2011	Brown y Smith	Modelo que considera la aversión al riesgo, los rendimientos esperados y los costos de transacción
Imposición de restricciones	2015	Abad y León	Restricciones de regulación
	2015	Musto, Semeraro, Lops et al.	Restricciones de orientación
	2015	Aiken, Clifford, y Ellis	Restricciones de exposición
	2010	Rosen y Saunders	Restricciones de gestión
	2003	Jagannathan y Ma	Restricciones de los pesos
Coeficiente de transferencia	2002	Clarke, De Silva, y Thorley	Coeficiente de transferencia
Desalineación de las restricciones	2013	Karels y Sun	Componentes principales de un portafolio
Impacto del error de estimación	2006	Kritzman	Impacto de pequeños errores de estimación
Medidas de diversificación	2011	Frahm y Wiechers	Medida de diversificación que comprende activos de riesgo
Optimización robusta	2003	Goldfarb y Iyengar	Problemas de selección robusta de portafolio
Incorporación de momentos superiores	1999	Li	Enfoque alternativo para el cálculo del VaR
	2010	Zuluaga y Cox	Los activos no se distribuyen normalmente
	1996	Morgan	Medida de Valor en Riesgo (VaR por sus siglas en inglés)
	2014	Flores, Flores y Paredes	Optimización simultánea de los objetivos particulares de media, varianza y asimetría
Métodos que usan el riesgo y no el rendimiento	2015	Maillet, Tokpavi, y Vaucher	Portafolio de Mínima Varianza Global
	2005	Glasserman	Riesgo de los componentes individuales respecto al riesgo total
	2015	Pae y Sabbaghi	Portafolios igualmente ponderados
Optimización Multiperíodo	2008	Calafiore	Decisión secuencial multiperíodo
	2015	Davari, Aminnayeri, y Seifi	Estructura de dependencia de los diferentes rendimientos

	2012	Liu, Zhang, y Xu	Modelos de lógica difusa
	2013	Liu, Zhang, y Zhang	Optimización de enjambre de partículas
	2005	Johnson	Modelo GARCH
Optimización Multiobjetivo	2015	Mendes, Paiva, Peruchi et al.	Técnicas ARMA-GARCH
	2013	Miralles, Miralles, y Miralles	Modelos GARCH multivariantes
	2004	Schlottmann y Seese	Evolución diferencial para el análisis de riesgo-rendimiento de los portafolios
	2014	Pai y Michel	Evolución diferencial para diferentes clases de activos
	2007	Fernández y Gómez	Redes neuronales artificiales para trazar la frontera eficiente
	2008	Yu, Wang, y Lai	Red neuronal para hacer una selección óptima
	2011	Chen y Hirasawa	Algoritmos genéticos para encontrar la portafolio más eficiente
	2014	Matsumura y Kakinoki	Tasa de inversión utilizando un algoritmo genético que optimiza la estrategia comercial
	2009	Aranha e iba	Algoritmo memético para la optimización de la portafolio
	2015	Ruiz y Suárez	Enfoque memético abordan el problema de selección del portafolio óptimo
	2015	Luo, Seco y Wu	Modelo de rendimientos de los portafolios óptimos utilizando el modelo GARCH

Fuente: Elaboración propia

Discusión y conclusiones

Dentro de la gestión del riesgo, los conceptos de optimización y diversificación del portafolio han sido fundamentales para el desarrollo y la comprensión de los mercados financieros y la toma de decisiones. El mayor avance se produjo con la publicación de Markowitz (1952), conocida popularmente como teoría moderna de selección cuantifica el rendimiento y el riesgo de un activo, utilizando las medidas estadísticas de rendimiento esperado y la desviación estándar. Sugiere que los inversionistas deben considerar el rendimiento y el riesgo en conjunto, y determinar la asignación de los fondos entre las alternativas de inversión sobre la base del equilibrio riesgo-rendimiento.

La idea de que la toma de decisiones financieras es una compensación cuantitativa entre rendimiento y riesgo fue revolucionaria por dos razones. En primer lugar, planteó que se podría hacer una evaluación cuantitativa del portafolio en función de analizar el rendimiento y el riesgo en conjunto, considerando los rendimientos del activo acompañados de sus comovimientos. En segundo lugar, se formuló el proceso de toma de decisiones financieras como un problema de optimización. En particular, la OMV sugiere que entre el infinito número de portafolios que permitan alcanzar un objetivo de rendimiento en particular, el inversionista debe elegir el portafolio que tiene la variación más pequeña. Todas los demás portafolios son ineficientes debido a que tienen una mayor varianza y, por lo tanto, mayor riesgo.

La OMV se utiliza tanto para la construcción de portafolios (número de activos) como para la asignación de activos (clase de activos). En la actualidad, los principios introducidos a través de esta técnica se encuentran todavía en el núcleo de muchos enfoques modernos para la asignación de activos, el análisis de inversiones, la gestión de riesgos, el presupuesto de capital, y la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre. Sin embargo, por la complejidad, la debilidad y la incertidumbre de los entornos financieros, el modelo sigue siendo muy relevante con diferentes extensiones, variantes y nuevos avances. Estos incluyen, entre otros, los nuevos procedimientos computacionales de optimización, el cálculo de nuevas medidas de riesgo y novedosas metodologías para hacer frente a las cuestiones de aplicación.

REFERENCIAS

Abad, A., & León, A. (2015). Diversificación internacional de carteras con restricciones.

Aiken, A., Clifford, C., & Ellis, J. (2015). Hedge funds and discretionary liquidity restrictions. *Journal of Financial Economics, 116*(1), 197-218. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.jfineco.2015.01.002

Aranha, C., & Iba, H. (2009). *Using memetic algorithms to improve portfolio performance in static and dynamic trading scenarios.* Paper presented at the Proceedings of the 11th Annual conference on Genetic and evolutionary computation.

Baule, R. (2010). Optimal portfolio selection for the small investor considering risk and transaction costs. *OR Spectrum, 32*(1), 61-76. doi: 10.1007/s00291-008-0152-5

Black, F., & Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal, 48*(5), 28-43.

Brown, D., & Smith, J. (2011). Dynamic portfolio optimization with transaction costs: Heuristics and dual bounds. *Management Science, 57*(10), 1752-1770.

Calafiore, G. (2008). Multi-period portfolio optimization with linear control policies.

Clarke, R., De Silva, H., & Thorley, S. (2002). Portfolio constraints and the fundamental law of active management. *Financial Analysts Journal, 58*(5), 48-66.

Contreras, J., Misa, R., & Murillo , L. (2008). Obtención de Modelos Borrosos Interpretables de Procesos Dinámicos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI, 5*(3), 70-77. doi: http://dx.doi.org/10.1016/S1697-7912(08)70164-X

Chen, Y., & Hirasawa, K. (2011). A portfolio selection model using genetic relation algorithm and genetic network programming. *IEEJ Transactions on Electrical and Electronic Engineering, 6*(5), 403-413. doi: 10.1002/tee.20676

Davari, H., Aminnayeri, M., & Seifi, A. (2015). Multistage portfolio optimization with stocks and options. *International Transactions in Operational Research*, n/a-n/a. doi: 10.1111/itor.12174

Fernández, A., & Gómez, S. (2007). Portfolio selection using neural networks. *Computers & Operations Research, 34*(4), 1177-1191. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2005.06.017

Flores, M., Flores, L., & Paredes, A. (2014). Selección de portafolios de inversión incluyendo el efecto de asimetría: evidencia con activos de la Bolsa Mexicana de Valores. *Panorama Económico, 10*(19), 77-101.

Frahm, G., & Wiechers, C. (2011). On the diversification of portfolios of risky assets: Discussion papers in statistics and econometrics.

Friedman, M., & Savage, L. (1948). The utility analysis of choices involving risk. *The journal of political economy*, 279-304.

Glasserman, P. (2005). Measuring marginal risk contributions in credit portfolios. *FDIC Center for Financial Research Working Paper*(2005-01).

Goldfarb, D., & Iyengar, G. (2003). Robust portfolio selection problems. *Mathematics of Operations Research, 28*(1), 1-38.

Graham, B., Dodd, D., & Cottle, S. (1934). *Security analysis*: McGraw-Hill New York.

Hicks, J. (1935). A suggestion for simplifying the theory of money. *Economica, 2*(5), 1-19.

Izaurieta, F., & Saavedra, C. (2000). Redes neuronales artificiales. *Departamento de Física, Universidad de Concepción de Chile*.

Jagannathan, R., & Ma, T. (2003). Risk Reduction in Large Portfolios: Why Imposing the Wrong Constraints Helps. *The journal of finance, 58*(4), 1651-1684. doi: 10.1111/1540-6261.00580

Johnson, C. (2000). Métodos de evaluación del riesgo para portafolios de inversión.

Karels, R., & Sun, M. (2013). Active Portfolio Construction When Risk and Alpha Factors are Misaligned. In C. S. W. H. N. Gregoriou (Ed.), *Rethinking Valuation and Pricing Models* (pp. 399-410): Academic Press.

Kolm, P., Tütüncü, R., & Fabozzi, F. (2014). 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research, 234*(2), 356-371.

Kritzman, M. (2006). Are Optimizers Error Maximizers? *The Journal of Portfolio Management, 32*(4), 66-69.

Leavens, D. (1945). Diversification of investments. *Trusts and Estates, 80*(5), 469-473.

Li, D. (1999). Value at Risk based on the Volatility, Skewness and Kurtosis. *RiskMetrics Group*.

Liu, Y., Zhang, W., & Xu, W. (2012). Fuzzy multiperiod portfolio selection optimization models using multiple criteria. *Automatica, 48*(12), 3042-3053. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2012.08.036

Liu, Y., Zhang, W., & Zhang, P. (2013). A multiperiod portfolio selection optimization model by using interval analysis. *Economic Modelling, 33*, 113-119. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.econmod.2013.03.006

Luo, C., Seco, L., & Wu, L. (2015). Portfolio optimization in hedge funds by OGARCH and Markov Switching Model. *Omega, 57, Part A*, 34-39. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.omega.2015.01.021

Maillet, B., Tokpavi, S., & Vaucher, B. (2015). Global minimum variance portfolio optimisation under some model risk: A robust regression-based approach. *European Journal of Operational Research, 244*(1), 289-299. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2015.01.010

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance, 7*(1), 77-91.

Markowitz, H. (1956). The optimization of a quadratic function subject to linear constraints. *Naval research logistics Quarterly, 3*(1-2), 111-133.

Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection, Efficent Diversification of Investments*: J. Wiley.

Marschak, J. (1938). Money and the Theory of Assets. *Econometrica, Journal of the Econometric Society*, 311-325.

Matsumura, K., & Kakinoki, H. (2014). Portfolio Strategy Optimizing Model for Risk Management Utilizing Evolutionary Computation. *Electronics and Communications in Japan, 97*(8), 45-62. doi: 10.1002/ecj.11587

Mendes, R., Paiva, A., Peruchi, R., Balestrassi, P., Leme, R., & Silva, M. (2016). Multiobjective portfolio optimization of ARMA–GARCH time series based on experimental designs. *Computers & Operations Research*. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2015.05.001

Miralles, J., Miralles, J., & Miralles, M. (2013). Multivariate GARCH models and risk minimizing portfolios: The importance of medium and small firms. *The Spanish Review of Financial Economics, 11*(1), 29-38. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.srfe.2013.03.001

Moscato, P., & Cotta, C. (2003). Una Introducción a los Algoritmos Memeticos. *Inteligencia Artificial, Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial, 7*(19), 131-148.

Moujahid, A., Inza, I., & Larrañaga, P. (2008). Algoritmos Genéticos. *Universidad del País Vasco. Euskal Herriko Unibertsitatea.*

Musto, C., Semeraro, G., Lops, P., de Gemmis, M., & Lekkas, G. (2015). Personalized finance advisory through case-based recommender systems and diversification strategies. *Decision Support Systems, 77*, 100-111. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.dss.2015.06.001

Pae, Y., & Sabbaghi, N. (2015). Equally weighted portfolios vs value weighted portfolios: Reasons for differing betas. *Journal of Financial Stability, 18*, 203-207. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.jfs.2015.04.006

Pai, G., & Michel, T. (2014). Metaheuristic multiobjective optimization of constrained futures portfolios for effective risk management. *Swarm and Evolutionary Computation, 19*, 1-14. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.swevo.2014.08.002

Quintero, L. (2004). *Un Algoritmo Basado en Evolución Diferencial para Resolver Problemas Multiobjetivo.* Tesis de Maestría CINVESTAV-IPN.

Roll, R., & Ross, S. (1980). An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory. *The journal of finance, 35*(5), 1073-1103. doi: 10.2307/2327087

Rosen, D., & Saunders, D. (2010). Risk factor contributions in portfolio credit risk models. *Journal of Banking & Finance, 34*(2), 336-349. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.jbankfin.2009.08.002

Roy, A. (1952). Safety first and the holding of assets. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 431-449.

Ruiz, R., & Suárez, A. (2015). A memetic algorithm for cardinality-constrained portfolio optimization with transaction costs. *Applied Soft Computing, 36*, 125-142. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.asoc.2015.06.053

Schlottmann, F., & Seese, D. (2004). A hybrid heuristic approach to discrete multi-objective optimization of credit portfolios. *Computational Statistics & Data Analysis, 47*(2), 373-399. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.csda.2003.11.016

Sharpe, W. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The journal of finance, 19*(3), 425-442.

Williams, J. (1938). *The theory of investment value* (Vol. 36): JSTOR.

Yu, L., Wang, S., & Lai, K. (2008). Neural network-based mean–variance–skewness model for portfolio selection. *Computers & Operations Research, 35*(1), 34-46. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2006.02.012

Zhang, W., Zhang, X., & Xu, W. (2010). A risk tolerance model for portfolio adjusting problem with transaction costs based on possibilistic moments. *Insurance: Mathematics and Economics, 46*(3), 493-499. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2010.01.007

Zuluaga, L., & Cox, S. (2010). Improving Skewness of Mean-Variance Portfolios. *North American Actuarial Journal, 14*(1), 59-67.