

EXTENSIÓN DEL PROCESO DE ORNSTEIN-UHLENBECK PARA LA DESCRIPCIÓN DEL CRECIMIENTO ECONÓMICO EN UNA SOCIEDAD SUJETA A AMENAZA DELINCUENCIAL

M. A. Subieta Vásquez¹, G. M. Ramírez Ávila²

¹ Carrera de Física, U.M.S.A.

² Instituto de Investigaciones Físicas, U.M.S.A.

RESUMEN

Se analiza el proceso de Ornstein-Uhlenbeck considerando dos tipos de potenciales para la descripción del crecimiento de capital acumulado x de un sector social sometido a actividades delinCUenciales. Se considera un modelo basado en teoría de juegos diferenciales para la interacción entre la población, los policías y los delinCUentes, al cual le asignamos un caracter estocástico. Se resuelve la ecuación de Fokker-Planck lo que permite describir el comportamiento de la densidad de probabilidad de x en función del tiempo. Se estudian dos escenarios socio-económicos, considerando dos tipos de reacción (hostil y tolerante) de la población frente a la delinCUencia. Finalmente, se intenta hacer una correspondencia entre los aspectos termodinámicos y los socio-económicos.

Descriptor: Procesos Estocásticos, Econofísica.

1. INTRODUCCIÓN

Los métodos de la Física Estadística han demostrado ser muy fructíferos y en las últimas décadas ellos han resultado ser también muy importantes en la investigación multidisciplinaria. Por ejemplo la *ecuación maestra* además de tener aplicaciones en termodinámica, en la teoría de láseres [1], en la cinética química [2] e incluso en ciencias sociales [3]. Así, se puede citar el trabajo de Helbing [4] en el cual se describe el cambio del comportamiento de la población afectada por un campo social. Por otra parte, fenómenos tales como las actividades delinCUenciales y su efecto sobre la economía local han sido modelados utilizando teoría juegos diferenciales [5]. En este sentido, la propuesta es la descripción del crecimiento económico sujeto a actividades delinCUenciales desde una perspectiva estocástica, inspirada en el hecho ya mencionado del desarrollo que se tiene sobre la teoría, y además de la posibilidad de extender el concepto del proceso de *Ornstein-Uhlenbeck* a sistemas socio-económicos. La delinCUencia en general se ha visto presente en diferentes países, ya sean estos países con economías desarrolladas o países que se encuentran en desarrollo, pero que pasa cuando la delinCUencia se quiere introducir en una sociedad y tiene que corromper a las instituciones de seguridad en el país, ¿cómo se desarrolla esto en cada estructura de diferentes tipos de sociedades?. En este sentido analizamos dos escenarios, un escenario en el cual vemos una sociedad la cual no acepta con facilidad a la delinCUencia, es más, se comporta de una manera hostil ante ella, y otro escenario el cual se comporta de forma tal, que no tiene mucho control sobre la delinCUencia, se

analizan estos dos casos de manera separada.

2. MODELO DETERMINISTA

Se considera a un comerciante que al tiempo t tiene un capital acumulado $x(t)$, el cual es completamente invertido en su negocio. Sin la influencia de los delinCUentes, éste capital crece a una tasa constante q . Ahora, si se considera la presencia de la delinCUencia, al tiempo t el comerciante es amenazado, por lo que tiene dos opciones: rechazar o aceptar la demanda delinCUencial. Si la demanda es rechazada, el delinCUente procede con su amenaza en un instante de tiempo posterior $t + \Delta$ con una probabilidad $\Upsilon(\Delta; e_g, e_p)$, siendo $e_g(t)$ el *esfuerzo del delinCUente* por mantener su demanda en pie y $e_p(t)$ el *esfuerzo de la policía* por proteger al comerciante. La demanda de los delinCUentes está representada por:

$$\Theta_{\Delta} = \Upsilon(\Delta; e_g, e_p) e^{q\Delta} x(t), \quad (1)$$

lo cual nos conduce a la acumulación de capital en $t + \Delta$:

$$x(t + \Delta) = e^{q\Delta} x(t) (1 - \Upsilon(\Delta; e_g, e_p)). \quad (2)$$

Para $\Delta \rightarrow 0$ se tiene

$$\dot{x} = (q - f(e_g, e_p))x, \quad (3)$$

donde la tasa de amenaza delinCUencial

$$f(e_g, e_p) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Upsilon(\Delta; e_g, e_p) / \Delta, \quad (4)$$

es la propuesta en [5]. La interacción entre los delinCUentes, los policías y la población está basada en teoría de juegos diferenciales. Así, se consideran la funcional objetivo para los delinCUentes:

¹ Email: sekemnept@yahoo.es

² Email: gramirez@ulb.ac.be

$$\begin{aligned} & \max_{e_g} \int_0^{\infty} e^{-\rho_g t} (\Theta - c_g(e_g)) dt \\ & = \int_0^{\infty} e^{-\rho_g t} (x f(e_p, e_g) - c_g(e_g)) dt, \end{aligned} \quad (5)$$

y para los policías

$$\begin{aligned} f1(e_p, e_g) &= \kappa (x f(e_p, e_g) - c_g(e_g)), \\ f2(e_p, e_g) &= (1 - \kappa)(q - f(e_p, e_g))x - c_p(e_p), \\ \max_{e_p} \int_0^{\infty} e^{-\rho_p t} [f1(e_p, e_g) + f2(e_p, e_g)] dt, \end{aligned} \quad (6)$$

donde $c_p(e_p), c_g(e_g)$ son las funciones de costo para ambos jugadores, κ es el parámetro de corrupción, el cual describe el grado en el cual los delincuentes son capaces de corromper a la policía y ρ_g, ρ_p son las tasas de descuento temporal de ambos jugadores. Además, se tiene la forma funcional para la tasa de amenaza,

$$f = \Phi e_p^{\alpha_p} e_g^{\alpha_g}, \quad (7)$$

para la función de costo de los delincuentes

$$c_g(e_g) = c_g e_g^{\beta_g}, \quad (8)$$

y para la función de costo de los policías

$$c_p(e_p) = c_p e_p^{\beta_p}, \quad (9)$$

con $c_p, c_g, \beta_p, \beta_g, \alpha_g, \Phi$ y $\alpha_p < 0$ constantes. Φ es la reacción de la población frente a las actividades delincuenciales.

Aplicando el principio del máximo de Pontryagin [10]. Se halla la forma de las estrategias o trayectorias de control óptimo para ambos jugadores [5]:

$$e_g^*(x) = \left[\alpha \Phi \frac{(1 - \lambda_g)^{1+\alpha} c_p^\alpha}{(1 + \lambda_p - 2\kappa)^\alpha c_g^{1+\alpha}} \right]^{\frac{1}{\beta_g}} x^{\frac{1}{\beta_g}}, \quad (10)$$

$$e_p^*(x) = \left[\alpha \Phi \frac{(1 - \lambda_g)^\alpha (1 + \lambda_p - 2\kappa)^{1-\alpha}}{c_p^{1-\alpha} c_g^\alpha} \right]^{\frac{1}{\beta_p}} x^{\frac{1}{\beta_p}}, \quad (11)$$

donde λ_g, λ_p , son los precios sombra o los valores actuales de coestado de la acumulación de capital para cada jugador. De (10) y (11), se puede encontrar también la expresión para la tasa de amenaza en equilibrio

$$f^*(e_p^*, e_g^*) = \Phi \left[\frac{(1 - \lambda_g) c_p}{(1 + \lambda_p - 2\kappa) c_g} \right]^\alpha, \quad (12)$$

donde $\alpha \equiv \alpha_p / \beta_p = \alpha_g / \beta_g$. Uno de los resultados interesantes que sugiere la expresión (12) es el hecho de que la tasa de amenaza en equilibrio crece con el nivel de corrupción de la policía κ , hasta un valor κ crítico, véase Fig. 1, para el cual, la tasa de amenaza en equilibrio se bifurca presentando valores muy grandes. Entonces para valores pequeños de κ dentro del intervalo $[0, 1]$, existen los valores constantes $\lambda_g \in (0, 1)$ y $\lambda_p \in (-1, \infty)$, tales que

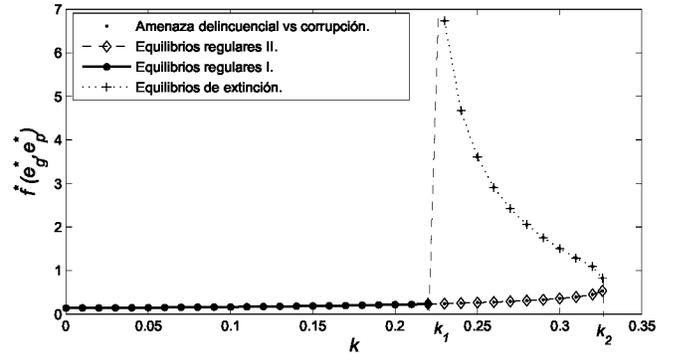


Figura 1. Tasa de amenaza en equilibrio en función del nivel de corrupción de la policía para $c_p = 0,6$, $c_g = 0,9$, $\alpha = 0,8$, $\Phi = 0,2$, $\rho_g = \rho_p = 1$, donde $\kappa_1 = 0,22$, $\kappa_2 = 0,326$.

el par de estrategias (10) y (11) constituyen un equilibrio perfecto de *Markov* en el juego.

Existen dos tipos de equilibrio, un único equilibrio para $\kappa \leq \kappa_1$, y un otro equilibrio para $\kappa \in (\kappa_1, \kappa_2]$ con valores bajos de la tasa de amenaza en equilibrio, los cuales son llamados *equilibrios regulares*. El otro equilibrio correspondiente a la rama de $\kappa \in (\kappa_1, \kappa_2]$ con valores altos de la tasa de amenaza en equilibrio, es llamado *equilibrios de extinción*. En los equilibrios regulares, la tasa de amenaza en equilibrio aumenta con el nivel de corrupción de la policía. En tanto que en los equilibrios de extinción la tasa de amenaza en equilibrio disminuye con el nivel de corrupción y, cuando nos aproximamos a κ_1 tiende a infinito, ver Fig. 1.

Si se considera un escenario donde los valores de la corrupción se encuentran cercanos al valor de κ_1 , deberíamos esperar que el equilibrio regular permanezca también para $\kappa > \kappa_1$; sin embargo, se tiene que para valores de κ ligeramente mayores que κ_1 , repentinamente se genera un segundo equilibrio, donde se tienen valores muy altos de la tasa de amenaza en equilibrio. En este caso $\lambda_g \approx 1$ y $\lambda_p \approx 2\kappa - 1$, lo cual implica que los valores de los esfuerzos de ambos jugadores están dentro de $[0, 1]$. Los esfuerzos de los delincuentes son mayores que los de los policías, induciendo así una gran tasa de amenaza, lo cual implica que en los equilibrios de extinción, la policía conspira con los delincuentes y no ofrece protección, permitiendo que la extorsión aumente y se constituya en un daño significativo hacia las actividades económicas. En lo que sigue, nos enfocaremos en el estudio de las estrategias (10) y (11), sujetas al comportamiento estocástico de la acumulación de capital.

3. MODELO ESTOCÁSTICO

En este modelo, se considera la *ecuación de Langevin* como ecuación fenomenológica, la cual representará en cada instante de tiempo el crecimiento de la cantidad de capital acumulado y a su vez, el estado del juego diferencial estocástico. En este sentido, el crecimiento del capital acumulado es considerado como el movimiento unidimensional de una partícula *browniana*, la cual

está inmersa en un fluido y experimenta fluctuaciones en su movimiento debido a la fuerza fluctuante $\Gamma(t)$. A su vez, la partícula está sometida a una fuerza de fricción que es proporcional a su velocidad; es decir:

$$F_f(v) = -\zeta v, \quad (13)$$

la cual corresponde a la fuerza análoga dada por:

$$F(x) = -\mu x, \quad (14)$$

donde $F(x)$, representa la fuerza socio-económica, proporcional al crecimiento del capital acumulado de la sociedad multiplicado por el coeficiente μ . Esta fuerza en relación con el potencial socio-económico estará dada por $F(x) = -\frac{d}{dx}V(x)$, al igual que su análogo para la partícula browniana, es decir: $F_f(v) = -\frac{d}{dv}V(v)$.

En el modelo, se asume que el fluido representa a la sociedad³ donde el potencial $V(x)$ puede ser entendido como el campo socio-económico, el cual refleja la influencia social y las interacciones relevantes para el cambio en el comportamiento de la variable macroscópica que corresponde al crecimiento de la cantidad de capital acumulado. En consecuencia, se tiene un juego diferencial estocástico sujeto a un proceso del tipo *Ornstein-Uhlenbeck* en el cual, si $q < f^*$, da lugar a un potencial socio-económico parabólico para el proceso. Entonces, la ecuación de *Langevin* para este caso será:

$$dx_t = -\mu x_t dt + \sigma dW_t, \quad (15)$$

análogamente

$$dv_t = -\zeta v_t dt + \sigma dB_t, \quad (16)$$

donde $\mu = q - f^*$, $\zeta = \zeta_b/m$, $dB_t = \Gamma_b(t)/m = \Gamma(t)$ y m es la masa⁴ de la partícula browniana. Ahora si se escribe (15) como:

$$dx_t = -\mu x_t dt + \text{fluctuaciones}, \quad (17)$$

se tiene que el término $\sigma \dot{W}_t = \sigma dW_t = \sigma \xi(t)$ es la fuerza aleatoria socio-económica que es una variable estocástica asociada al ruido que producen las fluctuaciones de la actividad económica de la sociedad en la acumulación de capital. Despreciando dichas fluctuaciones, volvemos a la ecuación determinista para el crecimiento del capital acumulado (3).

Se asume que $\xi(t)$ es un ruido blanco delta correlacionado, es decir

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t - t'),$$

³En la analogía de la sociedad con el fluido, se considera a cada agente económico de la sociedad como una molécula del fluido; donde éstos contribuyen de una manera aleatoria con el crecimiento económico, en términos de la acumulación de capital. En el modelo la interacción relevante en la sociedad es dada entre los policías con los delincuentes, tomando en cuenta la actitud de la sociedad frente a la delincuencia.

⁴Se considera al tamaño del capital acumulado como análogo a la masa.

análogamente para el caso de la partícula browniana se tiene:

$$\langle \Gamma(t) \rangle = 0, \quad \langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t - t'),$$

donde el factor de peso σ^2 es la medida de la intensidad de ruido. Además, se tiene que la función de correlación $\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle$ es proporcional a la función δ . Asimismo, el juego diferencial estocástico estará sujeto a la ecuación fenomenológica

$$dx_t = \mu x_t dt + \sigma dW_t. \quad (18)$$

Si $q > f^*$, se tiene un potencial socio-económico parabólico invertido para el proceso. Análogamente para la partícula browniana se tiene que:

$$dv_t = \zeta v_t dt + \sigma dB_t. \quad (19)$$

3.1. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LANGEVIN

Para esto, se considera una ecuación de *Fokker-Planck* para la evolución temporal de la densidad de probabilidad de la variable macroscópica x . Entonces, para un potencial parabólico dado por

$$V(x) = \frac{1}{2}\mu x^2. \quad (20)$$

La ecuación de *Langevin* (15) se resuelve realizando el cambio: $y = \frac{\sqrt{\mu}}{\sigma}x$ con $t' = \mu t$ [9], y rescribiendo $t' = t$ se tiene:

$$dy_t = -y_t dt + dW_t, \quad (21)$$

que según la interpretación de *Ito*, se tendrá la ecuación asociada de *Fokker-Planck*

$$\frac{\partial P(y, t|y_0)}{\partial t} = -\frac{\partial P(y, t|y_0)}{\partial y}y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P(y, t|y_0)}{\partial y^2}, \quad (22)$$

donde $P(y, t|y_0)$ es la densidad de probabilidad de transición en función del tiempo. Para el caso en el que se tiene un potencial parabólico invertido

$$V(x) = -\frac{1}{2}\mu x^2. \quad (23)$$

La ecuación de *Fokker-Planck* para (23) tiene la forma:

$$\frac{\partial P(y, t|y_0)}{\partial t} = \frac{\partial P(y, t|y_0)}{\partial y}y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P(y, t|y_0)}{\partial y^2}. \quad (24)$$

Finalmente, para el caso en el que el potencial es cero se tiene la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial P(y, t|y_0)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P(y, t|y_0)}{\partial y^2}, \quad (25)$$

que corresponde a un proceso de *Wiener*.

3.2. EXPANSIÓN EN AUTOFUNCIONES DE LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE TRANSICIÓN

Escribiendo la densidad de probabilidad como:

$$P(y, t) = \varphi(y)e^{-\lambda t}, \quad (26)$$

esto nos conduce a

$$L_{\text{FP}}\varphi(y) = -\lambda\varphi(y), \quad (27)$$

es decir

$$-y \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(y)}{\partial y^2} = -\lambda\varphi(y), \quad (28)$$

donde L_{FP} es el operador de Fokker-Planck. Ahora escribiendo:

$$e^{y^2} L_{\text{FP}}\varphi(y)e^{-y^2} = -\lambda\varphi(y), \quad (29)$$

el operador L_{FP} es transformado en el operador \bar{L}_{FP} , el cual es Hermitiano. Donde las autofunciones de este operador estarán dadas por:

$$\psi(y) = \varphi(y)e^{y^2}. \quad (30)$$

Por tanto, (21) se reduce a un problema de autovalores, $\lambda_n = n$ con $n = 1, 2, \dots$ y autofunciones

$$\psi_{\lambda_n} = H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} (e^{-y^2}), \quad (31)$$

las cuales son los polinomios de *Hermite*. Además, las autofunciones cumplen las condiciones de ortogonalidad:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} H_n(y) H_m(y) dy = 0, \quad (32)$$

para $n \neq m$ y

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} H_n^2(y) dy = \sqrt{\pi} 2^n n! = C_n^{-1}. \quad (33)$$

Por lo que las autofunciones ortonormalizadas toman la forma:

$$\psi_n(y) = \tilde{H}_n(y) = \sqrt{C_n} H_n(y). \quad (34)$$

La solución formal de (22) dependiente del tiempo con la condición inicial:

$$P(y, t|y_0) = \delta(y - y_0), \quad (35)$$

puede ser escrita [8]:

$$P(y, t|y_0) = e^{-y^2} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(y) \psi_n(y_0) e^{-nt}. \quad (36)$$

De este modo se tiene la expansión de la densidad de probabilidad de transición en autofunciones ψ_n . Por lo tanto (36) es la representación espectral de la densidad de probabilidad de transición $P(y, t|y_0)$. Ahora, tomando en cuenta (34) se tiene:

$$P(y, t|y_0) = e^{-y^2} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{H}_n(y) \tilde{H}_n(y_0) e^{-nt}. \quad (37)$$

La autofunción $\psi_0(y)$ representa en este caso la densidad de probabilidad estacionaria correspondiente al autovalor $n = 0$ y para la autofunción $H_0(y) = 1$ no normalizada, de modo que:

$$\psi_0(y) = \sqrt{N} H_0(y) e^{-y^2}. \quad (38)$$

Entonces, es posible hallar la densidad de probabilidad estacionaria calculando N , de manera que:

$$N^{-1} = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{\sigma^2 \pi}{\mu}}, \quad (39)$$

donde finalmente $\psi_0(y)$ toma la forma:

$$\psi_0(y) = \sqrt[4]{\frac{\mu}{\sigma^2 \pi}} e^{-y^2}. \quad (40)$$

En virtud de la fórmula de Mehler⁵ [9], la serie en (37) puede ser sumada. En consecuencia, se llega a la expresión definitiva de la densidad de probabilidad de transición:

$$P(y, t|y_0) = \sqrt{\frac{1}{\pi(1 - e^{-2t})}} \exp \left[-\frac{(y - y_0 e^{-t})^2}{1 - e^{-2t}} \right]. \quad (41)$$

Tomando en cuenta que $\lambda_n = \mu n$ debido a $t' = \mu t$ en la variable de estado x y además $y = \frac{\sqrt{\mu}}{\sigma} x$, entonces (41) toma la forma:

$$P(x, t|x_0) = \sqrt{\frac{\mu}{\pi \sigma^2 (1 - e^{-2\mu t})}} \exp \left[-\frac{\mu(x - x_0 e^{-\mu t})^2}{\sigma^2 (1 - e^{-2\mu t})} \right]. \quad (42)$$

Se concluye por lo tanto que (37) es la representación espectral de $P(x, t|x_0)$ con $y = \frac{\sqrt{\mu}}{\sigma} x$ y además que las autofunciones ψ_n juntamente con los autovalores $\lambda_n = \mu n$ forman un conjunto completo. Por tanto, el espectro del proceso de *Ornstein-Uhlenbeck* es puramente discreto, dado que $\lambda_n = \mu n$; en otras palabras, el espectro consiste de todos los armónicos de frecuencia de relajación μ del proceso.

Siguiendo el mismo procedimiento, para el caso del potencial parabólico invertido, el proceso no tiene una solución estacionaria lo cual implica que los autovalores tienen la forma $\lambda_n = n + 1$, de modo que (36) resulta:

$$P(y, t|y_0) = e^{-y^2} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{H}_n(y) \tilde{H}_n(y_0) e^{-nt} e^{-t}. \quad (43)$$

Por tanto, se tiene:

$$P(y, t|y_0) = \sqrt{\frac{1}{\pi(1 - e^{-2t})}} \exp \left[\frac{(y_0 e^{-\mu t} - y)^2}{1 - e^{-2t}} \right] e^{-t}. \quad (44)$$

⁵Esta fórmula corresponde a la identidad

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)\pi}} \exp \left(\frac{-(x^2 + y^2 z^2 - 2xyz)}{1 - z^2} \right) = e^{-y^2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tilde{H}_n(x) \tilde{H}_n(y).$$

Finalmente, tomando en cuenta que $\lambda_n = \mu(n + 1)$ debido a $t' = \mu t$ en la variable de estado x y además que $y = \frac{\sqrt{\mu}}{\sigma} x$, entonces se tiene:

$$P(x, t|x_0) = \sqrt{\frac{\mu}{\pi\sigma^2(1 - e^{-2\mu t})}} \exp \left[\frac{\mu(x_0 e^{-\mu t} - x)^2}{\sigma^2(1 - e^{-2\mu t})} \right] e^{-\mu t}. \quad (45)$$

3.3. COEFICIENTES DE ARRASTRE Y DIFUSIÓN EN RELACIÓN CON LA FUERZA SOCIO-ECONÓMICA

De (15) y (21) se tiene que

$$dx_t = h(x, t)dt + g(x, t)dW_t, \quad (46)$$

con $g(x, t) = \sigma$ y $h(x, t) = \mp \mu x$. La relación de ambas funciones con la ecuación de *Fokker-Planck* está dada mediante los coeficientes de la interpretación de *Ito* [8]:

$$D^{(1)}(x, t) = h(x, t) \quad (47)$$

y

$$D^{(2)}(x, t) = g^2(x, t), \quad (48)$$

donde

$$g^2(x, t) = \sigma^2 = \text{cte}. \quad (49)$$

Por otro lado, la varianza para el proceso de *Ornstein-Uhlenbeck* en términos del coeficiente de difusión D es

$$\sigma^2 = 2\mu^2 D(1 - e^{-2\mu t}). \quad (50)$$

donde D es el coeficiente de difusión del proceso. Además, se tiene que el coeficiente de arrastre para el proceso de *Ornstein-Uhlenbeck* sujeto a potenciales parabólicos está dado por

$$D^{(1)}(x, t) = \mp \mu x = F(x, t). \quad (51)$$

Para $t \rightarrow \infty$ se verifica que

$$D = \frac{\sigma^2}{2\mu^2}. \quad (52)$$

Se puede ver que el coeficiente de arrastre del proceso, corresponde a la fuerza socio-económica en el modelo. Entonces, el campo socio-económico dependiente del tiempo puede ser escrito como

$$V(x, t) = -\frac{D^{(1)}(x, t)x}{2}. \quad (53)$$

Entonces, las expresiones (42) y (45) se pueden escribir en términos del coeficiente de difusión como

$$P(x, t|x_0) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\mu D(1 - e^{-2\mu t})}} e^{-\frac{V(x, t)}{D}} \quad (54)$$

y

$$P(x, t|x_0) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\mu D(1 - e^{-2\mu t})}} e^{-\frac{V(x, t)}{D}} e^{-\mu t}, \quad (55)$$

respectivamente, donde los campos socio-económicos dependientes del tiempo

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \frac{(x - x_0 e^{-\mu t})^2}{2\mu(1 - e^{-2\mu t})} \\ V(x, t) &= \frac{(x_0 e^{-\mu t} - x)^2}{2\mu(1 - e^{-2\mu t})}, \end{aligned}$$

corresponden a (54) y (55) respectivamente. En consecuencia (40) puede ser escrita como

$$P_{\text{est}}(x) = \psi_0(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{4D\pi\mu}} \exp \left[-\frac{x^2}{4D\mu} \right], \quad (56)$$

3.4. JUEGO DIFERENCIAL ESTOCÁSTICO

Las expresiones para las estrategias de los jugadores representados por los niveles de esfuerzos de los delincuentes y los policías, toman la forma

$$e_g^*(x, t) = \left[\alpha \Phi \frac{(1 - \lambda_g)^{1+\alpha} c_p^\alpha}{(1 + \lambda_p - 2\kappa)^\alpha c_g^{1+\alpha}} \right]^{\frac{1}{\beta_g}} P(x, t)^{\frac{1}{\beta_g}}, \quad (57)$$

y

$$e_p^*(x, t) = \left[\alpha \Phi \frac{(1 - \lambda_g)^\alpha (1 + \lambda_p - 2\kappa)^{1-\alpha}}{c_p^{1-\alpha} c_g^\alpha} \right]^{\frac{1}{\beta_p}} P(x, t)^{\frac{1}{\beta_p}}, \quad (58)$$

debido a que el crecimiento de la acumulación de capital está representado por (42) y (45); los niveles de esfuerzo de ambos jugadores estarán sujetos al comportamiento de las densidades de probabilidad fuera del equilibrio termodinámico. Así, las funcionales objetivo de cada jugador estarán sujetas a los valores esperados de los niveles de esfuerzo, es decir

$$\max_{e_g} E(e_g) \left[\int_0^\infty e^{-\rho_g t} (x\gamma(e_p, e_g) - c_g(e_g)) \right] dt, \quad (59)$$

para los delincuentes y

$$g1(e_p, e_g) = \kappa(x\gamma(e_p, e_g) - c_g(e_g)),$$

$$g2(e_p, e_g) = (1 - \kappa)(q - \gamma(e_p, e_g))x - c_p(e_p),$$

$$\max_{e_p} E(e_p) \left[\int_0^\infty e^{-\rho_p t} [g1(e_p, e_g) + g2(e_p, e_g)] \right] dt, \quad (60)$$

para los policías. Así, (57) y (58), para el *estado estacionario* o de equilibrio termodinámico del proceso de *Ornstein-Uhlenbeck* sujeto a un potencial parabólico, adoptan la forma

$$e_g^*(x) = \left[\alpha \Phi \frac{(1 - \lambda_g)^{1+\alpha} c_p^\alpha}{(1 + \lambda_p - 2\kappa)^\alpha c_g^{1+\alpha}} \right]^{\frac{1}{\beta_g}} P_{\text{est}}(x)^{\frac{1}{\beta_g}}, \quad (61)$$

$$e_p^*(x) = \left[\alpha \Phi \frac{(1 - \lambda_g)^\alpha (1 + \lambda_p - 2\kappa)^{1-\alpha}}{c_p^{1-\alpha} c_g^\alpha} \right]^{\frac{1}{\beta_p}} P_{\text{est}}(x)^{\frac{1}{\beta_p}}, \quad (62)$$

de modo que los valores esperados serán

$$E(e_g^*) = \left[\alpha \Phi \frac{(1 - \lambda_g)^{1+\alpha} c_p^\alpha}{(1 + \lambda_p - 2\kappa)^\alpha c_g^{1+\alpha}} \right]^{\frac{1}{\beta_g}} (\pi D \mu)^{\frac{1}{4\beta_g}}, \quad (63)$$

$$E(e_p^*) = \left[\alpha \Phi \frac{(1 - \lambda_g)^\alpha (1 + \lambda_p - 2\kappa)^{1-\alpha}}{c_p^{1-\alpha} c_g^\alpha} \right]^{\frac{1}{\beta_p}} (\pi D \mu)^{\frac{1}{4\beta_p}}, \quad (64)$$

debido a que el valor esperado de la densidad de probabilidad estacionaria (40) para el crecimiento de la acumulación de capital está dado por

$$E(x) = \int_0^\infty x P_{\text{est}}(x) dx = \sqrt[4]{\pi D \mu}. \quad (65)$$

4. ESCENARIOS SOCIO-ECONÓMICOS

Se caracterizan los escenarios socio-económicos en base a (i) la actitud de la sociedad frente a las actividades delincuenciales, (ii) la corrupción⁶ de la policía, y (iii) la actitud de ambos jugadores frente a sus utilidades. La primera situación es reflejada por el parámetro $\tilde{\phi} = \frac{\phi}{q} \left[\frac{c_p}{c_g} \right]^\alpha$, donde q es la tasa de crecimiento económico⁷; c_g y c_p son los coeficientes asociados a las funciones de costos (8) y (9) para ambos jugadores y α puede ser interpretado como la demanda de trabajo en el área; en este sentido, un alto nivel de desempleo es representado por valores grandes de α , mientras que una alta demanda de trabajo es representada por valores pequeños de α . Entonces, si $\tilde{\phi} > 1$ se tiene un escenario en el cual la sociedad es tolerante hacia las actividades delincuenciales, mientras que si $\tilde{\phi} < 1$ la sociedad es hostil a las actividades delincuenciales. La segunda situación es reflejada en el comportamiento de la tasa de amenaza f^* en equilibrio, en función del nivel de corrupción κ . En este sentido, como se pudo observar en la Fig. 1, para un mismo nivel de corrupción existen dos situaciones en las cuales se tienen; por un lado, una sociedad sumergida en la delincuencia debido a los altos niveles de amenaza⁸, y por el otro lado, una sociedad sujeta a la delincuencia, pero con bajos niveles de amenaza⁹. Todo este comportamiento se puede observar dentro de los niveles de corrupción pertenecientes al intervalo $[\kappa_1, \kappa_2]$. Finalmente, la tercera situación se refleja en los parámetros ρ_g y ρ_p , los cuales representan las tasas de descuento temporal para los delincuentes y policías respectivamente.

⁶La definición de corrupción que se utiliza en el trabajo, es la definición utilizada por el "Banco Mundial", la cual es, "El abuso de las instituciones públicas para la ganancia privada". (World Bank, "Helping Countries Combat Corruption: The role of the World Bank", 1997).

⁷El crecimiento económico es considerado en términos de la acumulación de capital.

⁸La situación descrita por altos niveles de amenaza delincencial, es considerada como el efecto del alto grado de conspiración entre delincuentes y policías para con el crecimiento económico de la región.

⁹En esta situación, se considera el efecto de un bajo grado de conspiración entre delincuentes y policías.

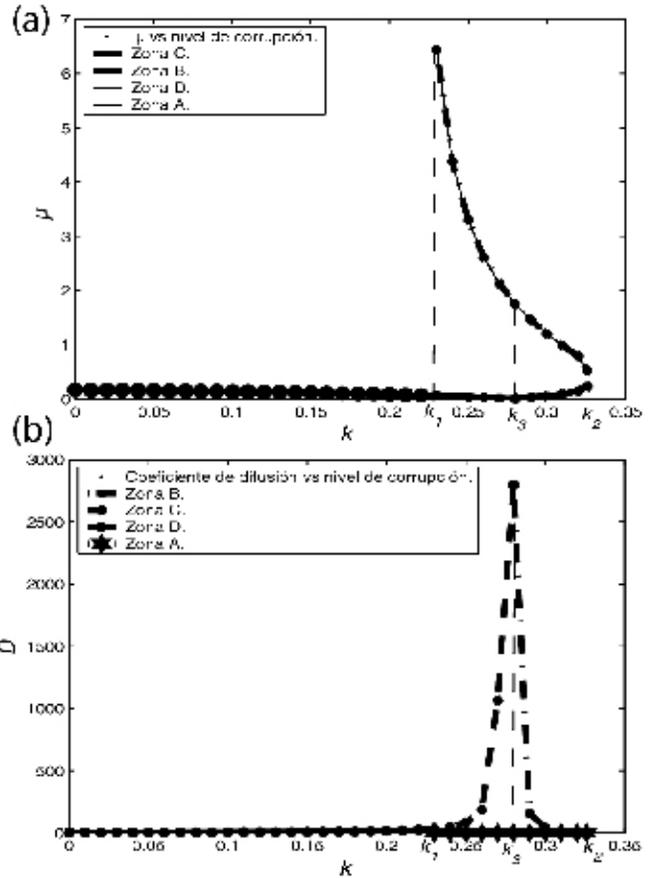


Figura 2. Comportamiento de (a) $|\mu|$, (b) D en función del nivel de corrupción de la policía κ , para $q = 0,3$, $\tilde{\phi} = 0,48$, $\alpha = 0,8$, $c_g = 0,9$, $c_p = 0,6$, $\phi = 0,2$, $\rho_g = \rho_p = 1$. Los puntos críticos característicos corresponden a $\kappa_1 = 0,22$, $\kappa_2 = 0,326$ y $\kappa_3 = 0,28$.

Valores de $\rho_g \geq 1$ y $\rho_p \geq 1$, se traducen en una actitud miope¹⁰ de ambos jugadores.

4.1. ESCENARIO I

Este escenario está caracterizado por una actitud hostil de la sociedad hacia los delincuentes, donde se tiene una alta demanda de trabajo, y la policía así como los delincuentes toman una actitud miope. El comportamiento de f^* en función de κ , se muestra en la Fig. 1, donde para un mismo nivel de corrupción, puede haber un daño significativo en el crecimiento económico¹¹ ($f^* \rightarrow \infty$), mientras que para $f^* \rightarrow 0$, no se tiene ningún efecto significativo.

A continuación se analiza el comportamiento de μ y D mediante un enfoque termodinámico y otro socio-económico.

¹⁰La miopía es considerada como la actitud en la cual, ni los policías, ni los delincuentes, tienen una visión a largo plazo; es decir, ambos solo ven los beneficios de sus utilidades a corto plazo.

¹¹Para el modelo estocástico, el crecimiento económico es considerado una variable aleatoria, debido a que este no solamente está influenciado por f^* , sino también por el efecto de las contribuciones aleatorias de cada individuo relacionado con alguna actividad económica dentro de la sociedad.

4.1.1. ENFOQUE TERMODINÁMICO

En la Fig. 4(a) se puede observar que μ , presenta en el intervalo $[\kappa_1, \kappa_2]$ la coexistencia de tres curvas caracterizadas por zonas en el modelo estocástico, las cuales representan el grado de fricción para el movimiento de la partícula que se las describe de la siguiente manera:

- La **zona A** además de representar a los equilibrios de extinción en el modelo estocástico, está caracterizada por ser una región de **alta fricción**, es decir, que dentro de ésta, el proceso que gobierna el comportamiento de la partícula browniana, es el proceso de *Ornstein-Uhlenbeck* sujeto a un potencial parabólico, debido a la presencia de una fuerza de fricción, donde μ es el coeficiente de fricción. La presencia de este potencial implica que el proceso tiene una solución estacionaria dada por (40), la cual describe al sistema en el equilibrio termodinámico. Dentro de la misma zona, se tienen dos casos límite para la alta fricción, uno está dado para el punto crítico κ_1 (límite máximo), y el otro para κ_2 (límite máximo).
- La **zona B** además de representar a los equilibrios regulares en el modelo estocástico, está caracterizada por ser una región de **baja fricción**, lo cual implica que está gobernada por un proceso de *Ornstein-Uhlenbeck* sujeto a un potencial parabólico, debido a la presencia de una fuerza socio-económica, donde μ es nuevamente el coeficiente de fricción. Dentro de esta misma zona, se tienen dos casos límite para la baja fricción, uno está dado para el punto crítico κ_2 (límite máximo) y el otro para κ_3 (límite mínimo).
- La **zona C** representa también a los equilibrios regulares en el modelo estocástico. Está caracterizada por ser una región con **ausencia de fricción**; en consecuencia, la zona tiene un proceso de *Ornstein-Uhlenbeck* sujeto a un potencial parabólico invertido, debido a la presencia de una fuerza socio-económica, donde μ no se comporta como un coeficiente de fricción. La presencia de este potencial en el proceso, implica que éste no tiene una solución estacionaria, por lo cual, la zona no describe un equilibrio termodinámico. Al igual que en las otras dos zonas descritas anteriormente, ésta tiene dos casos límite para la ausencia de fricción, uno está dado para el punto crítico κ_1 (límite máximo), y el otro para κ_3 (límite mínimo).
- La **zona D** representa también a los equilibrios regulares en el modelo estocástico. La misma, está caracterizada también por ser una región con **ausencia de fricción**, lo cual implica que está gobernada por un proceso de *Ornstein-Uhlenbeck*, sujeto a un potencial parabólico invertido. Ésta zona corresponde al intervalo de $[\kappa = 0, \kappa_1]$, en el que los valores de μ disminuyen a medida que el nivel de corrupción

aumenta, como efecto de que los valores de f^* se incrementan con el nivel de corrupción.

En la Fig. 4(b), se puede observar también la presencia de las cuatro zonas mencionadas anteriormente. Vemos que, mientras el parámetro de corrupción se incrementa, el sistema está sujeto gradualmente a la influencia de f^* mediante el parámetro μ . En consecuencia, para los niveles de corrupción dentro del intervalo $[\kappa_1, \kappa_2]$, en el sistema ocurren transiciones debido a que ocurren también transiciones en el proceso de *Ornstein-Uhlenbeck*. Así, tomando en cuenta las transiciones dadas en los puntos críticos κ_1, κ_2 y κ_3 ; se tiene que en el punto crítico representado por κ_1 , ocurre una transición que va de la **zona C** a la **zona A**, y viceversa¹², a medida que los valores de μ se aproximan al límite máximo para la alta fricción correspondiente a la **zona A**; en consecuencia, debido a la dependencia del coeficiente de difusión D con el parámetro μ , los valores de D tienden a cero. Dado que la **zona A** puede presentar un equilibrio termodinámico para el proceso, entonces se toma en cuenta la energía media de la partícula, que por el principio de equipartición,

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} k_b T, \quad (66)$$

donde k_b es la constante de Boltzmann, m es la masa de la partícula y T es la temperatura. También, $t \rightarrow \infty$ es

$$\langle E \rangle = m\mu^2 D = \frac{1}{2} k_b T. \quad (67)$$

En consecuencia, $D \propto T$ en el equilibrio termodinámico. Así, se puede decir que a medida que $\mu \rightarrow \infty, T \rightarrow 0$, por lo cual el proceso se encontrará en la **zona A**. Para el punto crítico representado por κ_3 , se tienen dos transiciones: por un lado, ocurre una transición que va de la **zona C** a la **zona B** y viceversa, por el otro lado, ocurre una transición que va de la **zona C** a la **zona A** y viceversa. Entonces, en el primer caso, la transición es posible si los valores de μ se aproximan al límite mínimo para la baja fricción de la **zona B**; es decir, $\mu \sim 0$. En consecuencia $T \rightarrow \infty$ ya que $D \rightarrow \infty$. Para el segundo caso, la transición es posible, si los valores de μ se aproximan a la zona de alta fricción correspondiente a la **zona A**; es decir, $\mu \rightarrow \infty$. En consecuencia, $D \rightarrow 0$, lo que implica que $T \rightarrow 0$. Finalmente, para el punto crítico representado por κ_2 , se tiene una transición que va de la **zona B** a la **zona A** y viceversa, a medida que los valores de μ se aproximan al límite mínimo para la alta fricción correspondiente a la **zona A**. Así, $\mu \rightarrow \infty$, con lo que $D \rightarrow 0, T \rightarrow 0$.

4.1.2. ENFOQUE SOCIO-ECONÓMICO

La sociedad al ser considerada como un fluido; puede caracterizarse por el comportamiento de f^* mediante μ , en función del nivel de corrupción de la policía. Del enfoque termodinámico, hemos visto comportamientos de μ

¹²La transición puede ser de la **zona C** a la **zona A** y viceversa, ya que ambas zonas coexisten para un mismo punto crítico.

y D , en los cuales se reconocen cuatro zonas con distintas características. La **zona A** de alta fricción, la cual está caracterizada por valores de D tendiendo a cero, lo que implica dentro del contexto socio-económico que las fluctuaciones en el crecimiento económico son mínimas; es decir, que las contribuciones en el crecimiento económico de cada individuo de la sociedad son casi nulas. Debido a que $\mu \rightarrow \infty$, la influencia de este parámetro sobre el crecimiento económico es muy significativa, en consecuencia f^* lo es también sobre μ . Éste análisis, nos conduce a afirmar que, la influencia de la amenaza delincinencial sobre el crecimiento económico es tan grande, que las actividades económicas de la sociedad se ven muy afectadas, teniéndose consecuencias muy dañinas que obstaculizan en gran medida el crecimiento económico. Debido a que, la **zona B** representa a la región de baja fricción en el enfoque termodinámico, no se tiene una influencia significativa de μ sobre las fluctuaciones del crecimiento económico. Es decir, que f^* al no tener una incidencia muy grande sobre μ , las actividades económicas dentro la sociedad no son influenciadas en gran medida por la amenaza delincinencial; en consecuencia, el crecimiento económico no es obstaculizado. Sin embargo, a medida que nos aproximamos al punto crítico dado por κ_3 , la influencia de μ tiende a cero y la difusión del proceso tiende a infinito. Como resultado se tienen grandes fluctuaciones en el crecimiento económico, debido a que las contribuciones de cada individuo de la sociedad, no están sujetas a los potenciales socio-económicos; de lo cual, se puede decir que el crecimiento económico está libre de la influencia de la amenaza delincinencial. Como la **zona C** y la **zona D** están caracterizadas por una ausencia de fricción en el enfoque termodinámico; este hecho dentro del contexto socio-económico, significa que la influencia del potencial dado por (23) es muy significativa en el crecimiento económico; en consecuencia, las contribuciones de los individuos de la sociedad en el crecimiento económico no son afectadas por la influencia de la amenaza delincinencial.

Dentro del contexto socio-económico, las transiciones que ocurren dentro el intervalo de los puntos críticos para el nivel de corrupción dado por $[\kappa_1, \kappa_2]$, son interpretadas como transiciones del sistema socio-económico, donde se encuentra la coexistencia de las tres zonas descritas anteriormente, las cuales pueden ser clasificadas como sigue:

- La **zona A** representa una **región de mayor riesgo** para el crecimiento económico, debido a la gran influencia de la amenaza delincinencial sobre la sociedad.
- La **zona B** representa una **región de menor riesgo** para el crecimiento económico, debido a la pequeña influencia de la amenaza delincinencial sobre la sociedad.
- La **zona C** y la **zona D** representan las **regiones de mínimo riesgo** para el crecimiento económico,

debido a la influencia no perceptible de la amenaza delincinencial sobre la sociedad.

Entonces, las transiciones ocurren entre éstas zonas a medida que la influencia de f^* sobre los potenciales socio-económicos sea significativa o no. Es decir, el crecimiento económico se encontrará en la región de mayor riesgo para un nivel de corrupción de la policía, si ésta elige políticas que prioricen en favorecer sus ganancias y en consecuencia también las ganancias de los delincuentes, no tomando en cuenta los efectos que puedan traer dichas políticas sobre la sociedad y la economía¹³. Para el mismo nivel de corrupción, el crecimiento económico se encontrará en la región de menor riesgo, si la policía elige políticas que si bien, favorecen sus ganancias y las de los delincuentes, consideran también los efectos que traen dichas políticas en la sociedad y la economía¹⁴.

4.1.3. SITUACIÓN DE ESTANCAMIENTO ECONÓMICO

En el enfoque termodinámico, se vio que la **zona A** y la **zona B**, están caracterizadas también por ser regiones que presentan una solución estacionaria para el proceso, debido a las características del potencial parabólico que gobierna ambas zonas. Dentro del contexto socio-económico; ésta solución dada por (40), representa una situación de estancamiento económico ya que la densidad de probabilidad del crecimiento del capital acumulado es constante. Así, el valor esperado de este, viene dado por la expresión (65) la cual será invariable. En consecuencia, el nivel de esfuerzos de los policías y de los delincuentes estarán representados por las expresiones (63) y (64) respectivamente. El comportamiento de estos esfuerzos se muestra en la Fig. 4.1.3(a) y (b), donde se puede observar que en ambas **zonas A** y **B**, el nivel de esfuerzos de los delincuentes en función al nivel de corrupción es mayor que el de los policías¹⁵.

Además, se puede ver también que ambos esfuerzos disminuyen con el nivel de corrupción en la **zona A**¹⁶ y aumentan con el nivel de corrupción en la **zona B**¹⁷.

¹³Esta interpretación nos conduce a la idea, de que la policía no está muy interesada en que se socave la legitimidad y credibilidad de la institución.

¹⁴Esta interpretación puede ser considerada como una actitud de la policía, que vela por la legitimidad y credibilidad de la institución.

¹⁵Este hecho nos sugiere que si bien la policía con una actitud corrupta puede percibir mayor beneficio a largo plazo esta situación puede cambiar debido a que el precio sombra λ_p de los policías llega a ser negativo, lo cual les representa un beneficio mínimo ya que la institución es inamovible del sector, a diferencia de los delincuentes que pueden optar por moverse a otro sector.

¹⁶Éste hecho refleja por un lado, la actitud desinteresada que toma la policía hacia la legitimidad de la institución, en consecuencia, los esfuerzos por proteger a la sociedad disminuyen, por otro lado, la actitud hostil de la sociedad obliga a que los esfuerzos de los delincuentes por mantener su amenaza también disminuyan. En este sentido podemos considerar que en esta situación se tendrá una fuerte reacción social.

¹⁷Éste hecho refleja por un lado una actitud de la policía, la cual está interesada en la "legitimidad de la institución", para controlar de alguna manera la reacción de la sociedad. En consecuencia, los niveles de esfuerzos que emplean para proteger a la sociedad au-

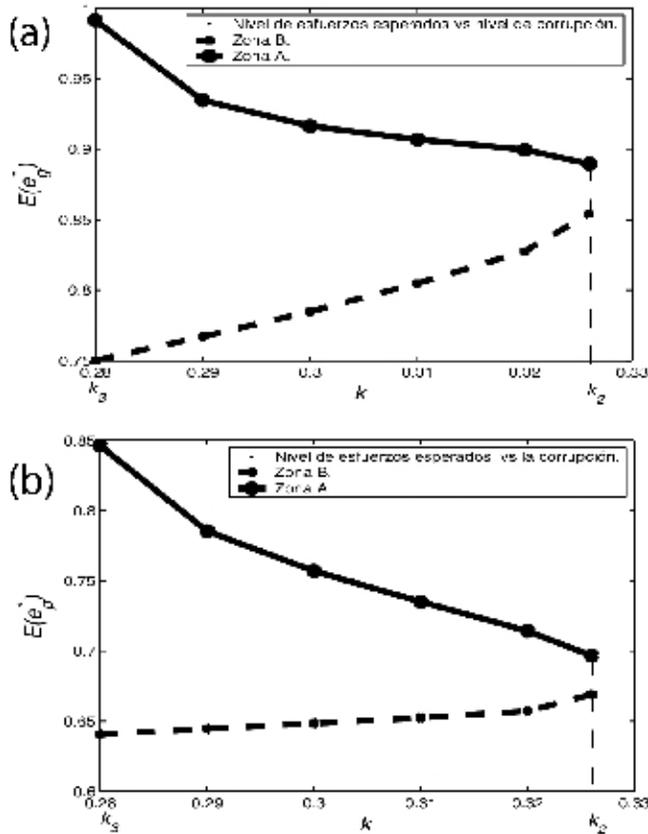


Figura 3. Nivel de esfuerzos (a) policía, (b) delincuentes en función del nivel de corrupción de la policía para $c_p = 0,6$, $c_g = 0,9$, $\alpha = 0,8$, $\Phi = 0,2$, $\bar{\Phi} = 0,48$, $\beta_g = \beta_p = 5$, $\rho_g = \rho_p = 1$, siendo $\kappa_3 = 0,28$, $\kappa_2 = 0,326$.

4.2. ESCENARIO II

Este escenario está caracterizado por una actitud tolerante de la sociedad hacia las actividades delincuenciales, donde la actitud de la policía y de los delincuentes es miope, y además se tiene una alta demanda de trabajo. Para estas condiciones, el comportamiento de la tasa de amenaza en equilibrio f^* , en función del nivel de corrupción de la policía se muestra en la Fig. 4.2. A diferencia con el comportamiento de f^* para el primer escenario, se puede ver que para este caso, el intervalo de los niveles de corrupción dados por $[\kappa_1, \kappa_2]$, son distintos. Además, la amenaza delincencial crece mucho más rápido con el nivel de corrupción. Se puede observar al igual que en el escenario anterior, que para un mismo valor del nivel de corrupción de la policía, se tienen dos situaciones; la primera cuando $f^* \rightarrow \infty$, por lo que la amenaza se encuentra en la región de los equilibrios de extinción; la segunda cuando $f^* \rightarrow 0$, por lo que la amenaza se encuentra en la región de los equilibrios regulares.

El comportamiento de μ y D se muestra en la Fig. 4.2(a) y (b), donde a diferencia del comportamiento de μ para el primer escenario, se puede observar para este caso, que solo se da la coexistencia de las zonas

mentan. Por otro lado, los esfuerzos de los delincuentes aumentan también debido a la reacción controlada de la sociedad.

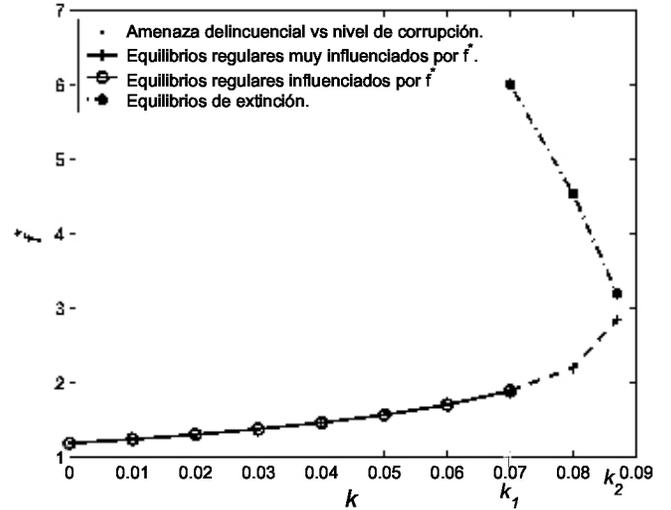


Figura 4. Tasa de amenaza en equilibrio f^* en función del nivel de corrupción de la policía para $c_p = 0,6$, $c_g = 0,9$, $\alpha = 0,8$, $\Phi = 0,9$, $\rho_g = \rho_p = 1$, siendo $\kappa_1 = 0,07$, $\kappa_2 = 0,087$.

A y B dentro del intervalo $[\kappa_1, \kappa_2]$. Donde, la **zona A** tiene las mismas características que en el escenario anterior, excepto que los valores límites para la región de alta fricción están dados por los puntos críticos $\kappa_1 = 0,07$ y $\kappa_2 = 0,087$. Del mismo modo, se tiene que para la **zona B** los límites para la región de baja fricción están dados por κ_1 y κ_2 . La **zona C** representa a diferencia del primer escenario, una región de fricción y corresponde al intervalo $[k = 0, \kappa_1]$. En resumen, las tres zonas representan regiones de fricción, siendo el nivel más alto el de la **zona A**.

Se puede observar también que la difusión para el proceso, disminuye muy rápidamente con el nivel de corrupción; es decir, $D \rightarrow 0$ más rápidamente. Nuevamente, se encuentran transiciones que van de la **zona A** a la **zona B** y viceversa, a medida que μ influye en el proceso. Debido a este hecho, D tiende a cero. Como las tres regiones de fricción pueden llegar al equilibrio termodinámico, podemos decir que $T \rightarrow 0$ como consecuencia de que $D \rightarrow 0$.

4.2.1. ENFOQUE SOCIO-ECONÓMICO

Debido al enfoque termodinámico dado en la anterior sección, se puede relacionar dentro del contexto socio-económico a las tres zonas como, regiones de riesgo para el crecimiento económico, siendo la **zona A** y **C**, las de menor riesgo. Como el riesgo está sujeto a la influencia de f^* , se puede puntualizar para este escenario, que la influencia de este parámetro es muy significativa en las tres zonas.

Las transiciones en el sistema socio-económico observadas dentro del intervalo de los niveles de corrupción $[\kappa_1, \kappa_2]$ están dadas para niveles de corrupción de la policía mucho más bajos que para el caso del primer escenario. Lo anterior es producto de la reacción de la sociedad frente a las actividades delincuenciales. En consecuen-

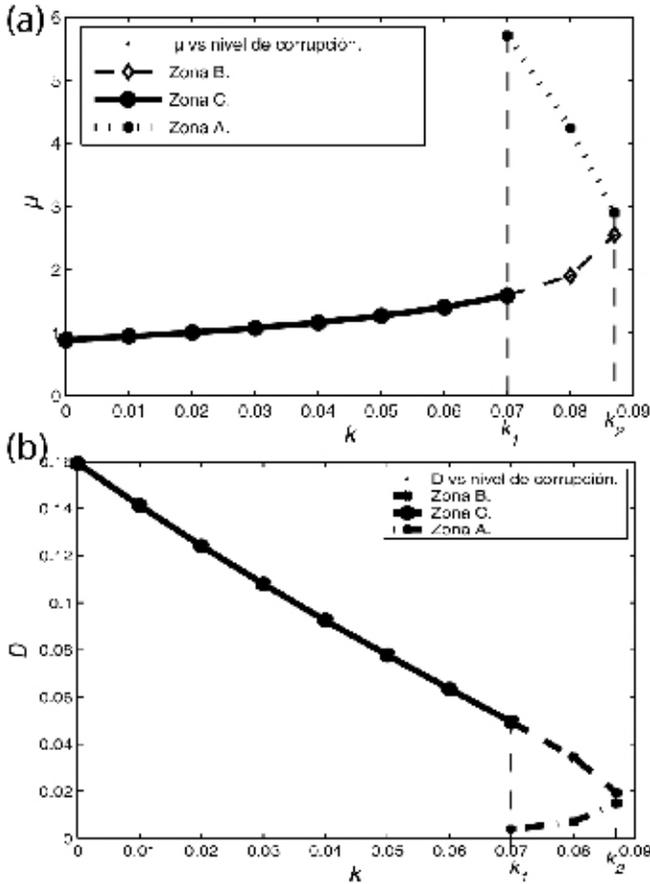


Figura 5. Comportamiento del coeficiente de (a) $|\mu|$, (b) de D en función del nivel de corrupción de la policía κ , para $q=0.3$, $\tilde{\phi} = 2,17$, $\alpha = 0,8$, $c_g = 0,9$, $c_p = 0,6$, $\phi = 0,9$, $\rho_g = \rho_p = 1$. Donde los puntos críticos característicos corresponden a los valores de $\kappa_1 = 0,07$, $\kappa_2 = 0,087$.

cia, se puede decir que en esta sociedad no se necesitan niveles altos de corrupción para encontrarnos en situaciones donde la actitud de la policía puede hacer que el sistema se encuentre en las regiones de mayor o menor riesgo para el crecimiento económico. En síntesis, debido a que la difusión del proceso tiende rápidamente a cero con el nivel de corrupción, el crecimiento económico es afectado en gran medida. Es decir, la influencia de la amenaza delictual aumenta rápidamente con el nivel de corrupción. En consecuencia, la sociedad tenderá a estar sometida por la delincuencia más rápidamente.

4.2.2. SITUACIÓN DE ESTANCAMIENTO ECONÓMICO

Como las tres regiones representan riesgo para el crecimiento económico, entonces todas representan una situación de estancamiento. Las causas son, al igual que en el primer escenario, la gran influencia que tiene la amenaza delictual sobre la sociedad. Este hecho nos conduce a un estado estacionario en el proceso, el cual representa la situación de estancamiento económico. Para este escenario el comportamiento de los niveles de esfuerzos de los policías y los delincuentes se muestra en la

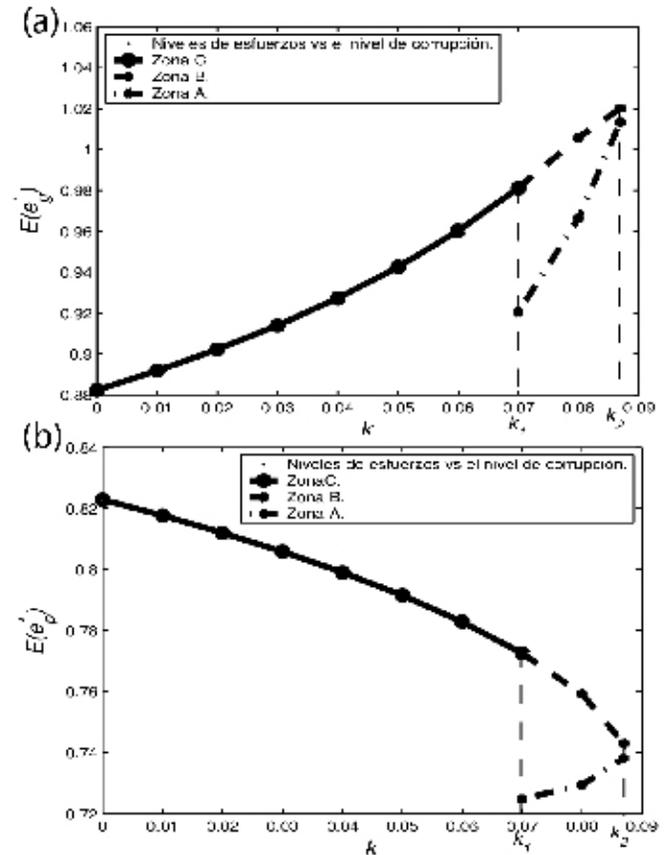


Figura 6. Nivel de esfuerzos de la policía (a), de los delincuentes (b) en función de la corrupción de la policía para $c_p = 0,6$, $c_g = 0,9$, $\alpha = 0,8$, $\Phi = 0,9$, $\tilde{\Phi} = 2,17$, $\beta_g = \beta_p = 5$, $\rho_g = \rho_p = 1$, siendo $\kappa_3 = 0,07$, $\kappa_2 = 0,087$.

Fig. 4.2.2(a) y (b), donde se puede observar que los niveles de esfuerzos de los delincuentes son mayores que el de los policías, con la diferencia de que los niveles de esfuerzos de los delincuentes crecen con el nivel de corrupción en las **tres zonas**¹⁸.

5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En base a los resultados obtenidos los cuales fueron explicados en las secciones precedentes, se puede decir que es posible abordar un problema socio-económico utilizando conceptos y herramientas de la Física, en particular de la Mecánica Estadística. El modelo físico engloba al modelo determinista de teoría de juegos y puede aportar más resultados.

En base al análisis del modelo, se pueden explicar algunas constataciones empíricas hechas en economía. Así, se puede ver que la corrupción de la policía puede resultar positiva en ciertas condiciones. Es decir, podemos suponer que la influencia del parámetro q en el crecimiento económico, limita la actividad económica de la sociedad. En este sentido, podríamos pensar que q es una tasa de

¹⁸Este hecho, está reflejado por el comportamiento de la sociedad; es decir, por la actitud tolerante que toma esta frente a los delincuentes. Los niveles de esfuerzo de los delincuentes aumentan, independientemente que la policía elija o no una actitud de interés hacia la legitimidad y credibilidad de la institución.

crecimiento sujeta a una reglamentación del comercio local, la cual no resulta muy favorable para el crecimiento económico de la región. Algunas observaciones empíricas sobre este hecho, aunque en un contexto socio-económico distinto son discutidas en [11]. En el primer escenario, tenemos una región con sólidas instituciones de seguridad y organizada socio-económicamente. En general, en este tipo de sociedades, los delincuentes tienen que hacer un mayor esfuerzo para introducirse. Este esfuerzo tiene un límite que se puede traducir en una irrupción brusca (con el consecuente rechazo de la sociedad) o solapada (aumentando niveles de corrupción). En el proceso de corrupción de las instituciones, puede darse una inyección de capital. Esto hace que exista un crecimiento económico cuyos réditos se distribuyan en la misma sociedad.

Por el contrario en una economía mal organizada y con instituciones frágiles, como es el caso de países en desarrollo, los delincuentes hacen esfuerzos menores por introducirse a su sistema, y justamente por esta razón, las membranas débiles de este país, no generan resistencia, tanto para la entrada de ese "pequeño capital, como para su salida: Esto último se traduce en el riesgo de fuga del capital sin generar ningún crecimiento económico.

Por otro lado, se puede extender el concepto del proceso de *Ornstein-Uhlenbeck* a otros sistemas socio-económicos. El modelo podría ser analizado mediante autómatas celulares, considerando a cada individuo de la sociedad como una célula, a la cual se puede asociar estados que podrían representar la actitud del mismo (hostil o tolerante) hacia la delincuencia y la policía. Una ventaja de esta perspectiva, es que se podría analizar la interacción entre todos los individuos de la sociedad y al mismo tiempo introducir ruido al sistema para estudiar sus efectos sobre la interacción. Este ruido podría representar una influencia aleatoria a un cambio en la actitud del o los individuos. Así el sistema estará sujeto a un proceso en el cual un comportamiento macroscópico (colectivo) de la sociedad, pueda ser entendido a partir de las interacciones entre individuos.

Se podría considerar dentro del modelo, que el coeficiente de difusión D dependa del tiempo. Este hecho, nos conduciría a otro tipo de proceso en el cual la ecuación de *Fokker-Planck* toma otra forma y para resolverla se deben utilizar métodos numéricos.

Se puede considerar i estados de N individuos de la sociedad en términos de su actitud, y construir una *ecuación maestra* en la cual el llamado vector de socio-

configuración contenga toda la información acerca de la distribución de los N individuos sobre los estados i . Donde se puede además asociar una probabilidad P de encontrar la socio-configuración A al tiempo t . De esta manera considerando las tasa de transición de la socio-configuración A a la A' en el tiempo t , se llega a la *ecuación maestra* para el sistema. Donde A' podría representar el cambio en la actitud de la sociedad.

Finalmente, en el modelo, se puede considerar el efecto de un potencial periódico sobre el sistema socio-económico.

Agradecimientos

MS agradece al Lic. Daniel Málaga por las fructíferas discusiones que ayudaron a aclarar los aspectos económicos del presente trabajo.

REFERENCIAS

- [1] Haken, H., *Laser Theory*, Springer, Berlin, 1984.
- [2] Oppenheim, K. E. Schuler and G. H. Weiss, eds., *Stochastic Processes in Chemical Physics: The Master Equation*, Mit Press, Cambridge, 1972.
- [3] Weidlich, W., *Physics and Social Science. The Approach of Synergetics*. *Physics Reports* **204**, 1–163, 1991.
- [4] Helbing D., *A Mathematical Model for the Behavior of Individuals in a Social Field II*. arXiv:cond-mat/9805194, V. 1., Institute for Theoretical Physics University of Stuttgart, 1998.
- [5] Dawid H., Feichtinger G., Novak *Extortion as an obstacle to economic growth: a dynamic analysis*. *European Journal of Political Economy*, V. **18**, 499–516, 2002.
- [6] Einstein A., *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geförderte Bewegung von in der ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*, *Ann. Phys.*, 17–549, 1905.
- [7] Uhlenbeck & Ornstein., *On the theory of Brownian motion*, *Physical Review* **36**, 823-841, 1930.
- [8] Risken H., *The Fokker-Planck equation*, Second edition, Springer, Verlag. Berlin, Hendelberg, New York, 1989.
- [9] Lefever R., *Noise-Induced Transitions, Theory and applications in Physics, Chemistry, and Biology*. Springer-Verlag Berlin Hendelberg, New York, Tokyo, 1984.
- [10] Dockner, Jorgensen, Vanlong, Sorger., *Differential games in economics and management science*, Cambridge, 2000. Kaufmann & Shan-Jin Wei., "Does Corruption 'Grease Money' Speed Up the Wheels of Commerce?", paper presented at the annual meeting of the American Economic Association., January, Chicago, 1998.
- [11] Lewin K., *Field Theory in Social Science*, Harper and Brothers, New York, 1951.