

UN MODELO DINÁMICO PARA EL CAMPO GEOMAGNÉTICO* A DYNAMIC GEOMAGNETIC FIELD MODEL

M. CALCINA[†]
Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
La Paz–Bolivia

RESUMEN

Se elabora un modelo que contempla solamente la influencia externa del ciclo magnético solar y el efecto de traslación de la Tierra sobre el campo geomagnético. Para ello se resuelve primero la ecuación de difusión homogénea de la magnetohidrodinámica, que se expresa en función del potencial magnético \vec{A} , considerando como factores influyentes del campo geomagnético al viento solar y la frecuencia de traslación de la Tierra alrededor del Sol. A continuación, se resuelve la ecuación de difusión inhomogénea que contempla como factor influyente al ciclo solar magnético (o equivalentemente, campo magnético interplanetario con origen solar), siendo este último introducido en la ecuación diferencial como una perturbación externa utilizando el criterio del oscilador armónico simple en cuanto a las oscilaciones de un sistema sometido a la acción de un campo exterior variable. Seguidamente, a fin de obtener las componentes geomagnéticas H y Z como función de la posición y del tiempo y contrastar los mismos con los datos observacionales, se hace el cambio del sistema de referencia de la solución homogénea al sistema de referencia de las componentes geomagnéticas y se ajusta esta solución a los datos de siete estaciones del mundo obteniendo un buen acuerdo. Finalmente, con estos ajustes se obtuvieron parámetros a través de los cuales se estima el momento magnético dipolar de la Tierra. No se hace el ajuste de la solución inhomogénea a consecuencia de la apreciable dispersión que presentan los datos comparados con el valor promedio del campo magnético interplanetario ($5nT$), lo cual hace que no exista la certeza de decir que esta solución representará adecuadamente las variaciones debidas a este campo externo.

Descriptores: geomagnetismo — magnetohidrodinámica

Código(s) PACS: 91.25.Cw, 52.65.Kj

ABSTRACT

A model was elaborated that considers the external influence of the solar magnetic cycle and the Earth's rotation effects on the geomagnetic field. This involved the solution of the magnetohydrodynamic homogenous diffusion equation. The equation is put as a function of the magnetic potential \vec{A} , and considers the influencing factors of solar wind, and the frequency of the Earth's rotation around the Sun. The non homogeneous equation was then solved using perturbation techniques where the influencing factor of the solar magnetic cycle was considered (interplanetary magnetic field of solar origin). This factor is introduced to the differential equation as an external factor using the harmonic oscillating criteria. To obtain the H and Z geomagnetic components as a function of time and location and to compare with observational data the homogenous solution's reference system is changed to that of the geomagnetic component system. The solution is compared with and adjusted to reflect data from seven world stations. Finally with these adjustments we obtain parameters and estimate the Earth's dipolar magnetic momentum. The adjustment of the non homogeneous solution is not carried out due to the significant dispersion of the data when compared with the average interplanetary magnetic field values. As such we cannot say that this solution represents the variations experienced due to the external magnetic field.

Subject headings: geomagnetism — magnetohydrodynamics

1. INTRODUCCIÓN

Es un hecho eminente que el campo magnético terrestre tiene variaciones temporales de largo y corto plazo. Esto debido a que éste es afectado por diferentes tipos de fuentes lo cual lo hace un fenómeno bastante complejo. Por otro lado el objetivo de los observatorios geomagnéticos es mantener un registro continuo y en el tiempo de éstas variaciones. Una de las varias fuentes responsables de las variaciones en el campo geomagnético es el Sol. Un ejemplo de esta influencia solar son las auroras, que son consecuencia de la interacción del viento solar (plasma emergente de la superficie solar) con la atmósfera terrestre en circunstan-

cias particulares a las cuales se las conoce como perturbaciones súbitas. El Sol no sólo influencia al campo geomagnético de ésta manera, sino que éste produce una variación periódica en el campo terrestre debido a su ciclo magnético y al viento solar. El objetivo del presente trabajo es elaborar un modelo que pueda describir las variaciones temporales del campo con origen en el ciclo solar magnético y la influencia del viento solar. Ello implica la construcción de un modelo para la magnetosfera, la cual es producto del impacto directo del viento solar (vínculo principal entre el Sol y la Tierra) con el campo geomagnético.

Existen diferentes trabajos que modelan la magnetosfera terrestre los cuales en su mayoría son estacionarios. Por ejemplo, Mead (1964) encuentra la deformación del campo geomagnético a partir del potencial geomagnético total que es producto de la ecuación de Laplace. Otros como Luhmann & Friesen (1979) lo

[†]Email: marcelmcn@gmail.com

*Tesis de Grado de la Carrera de Física de la UMSA, Mayo de 2009.
Tutores: Lic. Deterlino Urzagasti, Ing. Edgar Ricaldi.

hacen con base en la similitud existente entre la magnetosfera y la suposición de un campo constante con uno dipolar. Un modelo más sofisticado y el cual es base de éste trabajo fue realizado por Mendoza & Morales (2004) quienes construyen el modelo a partir de la ecuación de difusión de la magnetohidrodinámica. Siguiendo éstos mismos resultados se plantea una solución alternativa a la de Mendoza y Morales que busque explicar no solo la deformación del campo geomagnético a causa del viento solar sino también las fluctuaciones que existen en torno a éste campo a consecuencia de la influencia del Sol.

El trabajo de Tesis en esencia se constituye de cuatro partes primordiales. La primera parte describe aspectos teóricos fundamentales de la influencia que ejerce el Sol hacia la Tierra. En una segunda parte se detalla el planteamiento del modelo y la resolución del mismo. A fin de verificar el modelo, en una tercera parte se hace una comparación del mismo con los datos observacionales. Finalmente en la parte de conclusiones se analiza los resultados alcanzados por el modelo y sus limitaciones.

2. INTERACCIÓN SOL - TIERRA

Nuestro planeta se encuentra inmerso en un medio dominado por el material y la radiación que emite el Sol hacia el espacio, junto con el resto de los planetas del Sistema Solar, grandemente influenciados por este astro. El Sol ha mantenido su luminosidad prácticamente constante por varios miles de millones de años, permitiendo el desarrollo de la vida en la Tierra. El balance del ecosistema existente entre ambos es sumamente frágil por lo que aún pequeñas variaciones en la cantidad de radiación y partículas que recibimos del Sol, tienen un efecto significativo en nuestro medio ambiente.

El sistema Sol-Tierra puede considerarse como aquél constituido por cuatro componentes principales: el Sol, el medio interplanetario, la magnetosfera y la atmósfera terrestre. A este sistema hay que agregar toda una serie de agentes externos como los rayos cósmicos, -partículas de muy alta energía capaces de atravesar todo el medio interplanetario-, el campo geomagnético, el medio interestelar a través del cual se mueve nuestro sistema Solar, etc.

En general, la comprensión global del sistema constituido por la Tierra y sus alrededores en todas las escalas de tiempo es una cuestión sumamente compleja e interdisciplinaria. Cualquier cambio detectable en el sistema es, en última instancia, resultado de la interacción, la retroalimentación o incluso la posible amplificación de muchos factores causantes.

2.1. Estructura del Sol

El Sol es una gran esfera luminosa de gas capaz de enviar hacia el exterior toda clase de radiaciones: desde las de muy baja energía, como las ondas de radio, hasta las más penetrantes como los rayos gamma, así como partículas energéticas y plasma, este último en forma de haces (el viento solar) que llenan todo el Sistema Solar y se extienden hasta mucho más allá de sus límites, creando lo que se conoce como la heliosfera.

El Sol es una estrella enana de color amarillo, miembro de uno de los más numerosos tipos de estrellas, las del tipo espectral *G2*, que se mantiene unida por su propio campo gravitacional y presiones internas como la del plasma y la de radiación. Tiene un radio de 695980 km, es decir, 109 veces el radio de la Tierra, que tiene alrededor de 6371 km, y rota sobre su propio eje en aproximadamente 27 días. El interior está formado por tres capas: el núcleo, la zona radiativa y la zona convectiva, mientras que la atmósfera se divide en: fotosfera, cromosfera, zona de transición y corona. Todas estas regiones se ilustran en la Fig. 1.

— El Núcleo: En él, la densidad y la presión son tan altas que dan lugar a temperaturas de 15 a 16 millones de grados, suficiente para que se lleven a cabo reacciones nucleares. La fusión,

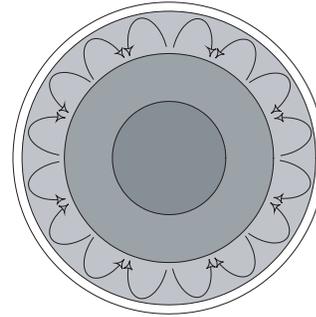


FIG. 1.— Estructura interna del Sol. Desde la parte más interna a la más externa: Núcleo, Zona Radiativa, Zona Convectiva y Atmósfera.

es decir la combinación nuclear de átomos ligeros para crear elementos más pesados, es la fuente de la enorme cantidad de energía que fluye a través de sucesivas capas hacia la fotosfera antes de que ella escape hacia el espacio como luz solar.

— Zona Radiativa: En esta capa el transporte de energía hacia el exterior se lleva a cabo mediante transferencia de radiación, es decir, al absorberse, dispersarse y remitirse la misma en esta parte del interior solar (de ahí el nombre de zona radiativa).

— Zona Convectiva: Esta zona está en la parte externa, por debajo de la superficie del Sol, donde la convección es más efectiva en la transferencia de energía que la zona radiativa. La energía es llevada hacia arriba por el gas caliente ascendente; la energía se difunde a medida que el gas ascendente se expande y entonces el gas se enfría y desciende.

— La atmósfera: La atmósfera solar es la región del Sol que puede ser observada desde afuera y desde la cual la energía es irradiada hacia el espacio. Una pequeña cantidad de energía solar es también perdida en la atmósfera en forma de energía cinética de partículas (el viento solar y los rayos cósmicos solares). La atmósfera a si misma se divide en cuatro regiones: La fotosfera, cromosfera, zona de transición y la corona.

2.2. Actividad Solar

La actividad solar se refiere a variaciones temporales de largo y corto periodo que ocurren en la atmósfera solar a consecuencia del complicado patrón de campo magnético emergente del interior del Sol el cual a su vez produce cambios en el medio plasmático donde se encuentra inmersa la Tierra (viento solar) y por ende afecta al campo geomagnético.

Una de las manifestaciones principales de la actividad solar son las manchas solares que presenta la superficie solar. Las manchas son regiones oscuras de la fotosfera, en donde el campo magnético es muy intenso. El número visible de manchas solares no es constante, la aparición y desaparición de éstas es un fenómeno cíclico con un periodo aproximado de 11 años, al que se conoce como ciclo solar. Durante el curso de un ciclo solar, la localización promedio de las manchas se mueve hacia el ecuador. Usualmente las manchas solares existen en pares con opuesta polaridad magnética. Además, las regiones polares del Sol tienen débiles campos pero todos ellos tienen una sola polaridad (opuesta en los dos hemisferios). Es así que, el promedio del campo solar a una muy grande escala es aproximadamente dipolar. El eje de este dipolo está en general inclinado con respecto al eje de rotación. La orientación del dipolo cambia cada ciclo, es por eso que, el verdadero periodo del campo magnético es de 22 años y no de 11 años. El cambio de polaridad del campo ocurre cuando la actividad solar es máxima (i.e., cuando el número de manchas solares es máximo).

2.3. El Medio Interplanetario (Viento Solar)

El viento solar, que no es más que la expansión supersónica de la atmósfera más alta del Sol (la corona), tiene una velocidad que

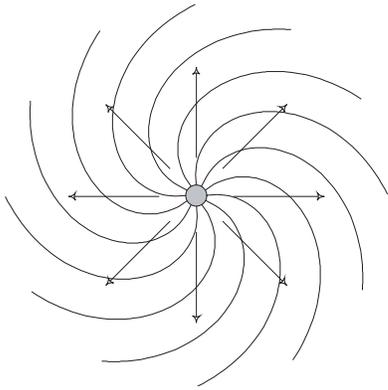


FIG. 2.— Configuración del campo magnético interplanetario en el plano del ecuador solar.

aumenta hasta alrededor de 400 km/s a una altura de un millón de kilómetros sobre la superficie solar (comparado con la velocidad de 30 km/s con la que se mueve la Tierra en su órbita alrededor del Sol), y se mantiene aproximadamente constante hasta los límites de la heliosfera. De esta manera, el viento solar transporta parte de la energía del Sol hacia el espacio. No obstante que esta energía sólo es de alrededor de una diez mil millonésima de toda la energía que emite el Sol en forma de radiación, la cual es del orden de $3.9 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$, pequeñas perturbaciones en el flujo del viento solar tienen consecuencias apreciables en el entorno terrestre.

Este plasma, constituido por partículas cargadas eléctricamente que normalmente se encuentran atrapadas por el Sol a causa de su gravedad, escapa de éste debido a la altísima temperatura que alcanza la corona, por arriba del millón de grados, y se precipita hacia afuera a velocidades supersónicas. En ocasiones, la velocidad del viento solar puede alcanzar los 1000 km/s o más a la altura de la órbita de la Tierra. Este flujo de alta velocidad envuelve nuestro planeta y perturba su campo magnético.

El plasma del viento solar es tan poco denso que sus partículas atraviesan la distancia del Sol a la Tierra (una unidad astronómica) casi sin colisiones. A la altura de la órbita de la Tierra el viento solar tiene una densidad de 10 partículas por cm^3 . Aunque fluye continuamente, su densidad y velocidad cambian constantemente.

De medidas realizadas por los satélites artificiales Viajero y Pionero, se sabe que la región del espacio que controla el Sol a través del viento solar, la heliosfera, se extiende más allá de 50 unidades astronómicas (es decir, más de cincuenta veces la distancia promedio del Sol a la Tierra).

2.4. Campo Magnético Interplanetario

Debido a que el plasma de viento solar tiene una conductividad eléctrica muy alta, el campo magnético del Sol se desplaza con el viento, siguiéndolo en su expansión por el medio interplanetario, como si se encontrara “pegado” a él. Así pues, el campo magnético que llega a la Tierra junto con el viento solar, al que se conoce como campo magnético interplanetario, no es más que la extensión del campo magnético del Sol.

El campo magnético general del Sol es, como ya indicamos, de tipo dipolar. El viento solar expande este campo radialmente hacia fuera del Sol. Podría esperarse que se estableciera un campo cuyas líneas fueran también radiales. Pero como el Sol gira y al girar traslada las líneas de campo emergentes del mismo, la geometría que finalmente resulta para las líneas del campo magnético interplanetario es la de una espiral. Eugene Parker fue quien demostró que así debería de ser, por eso a esta estructura se le llama la espiral de Parker. En el plano del ecuador solar, que es muy cercano al plano de la eclíptica (el plano de la órbita de

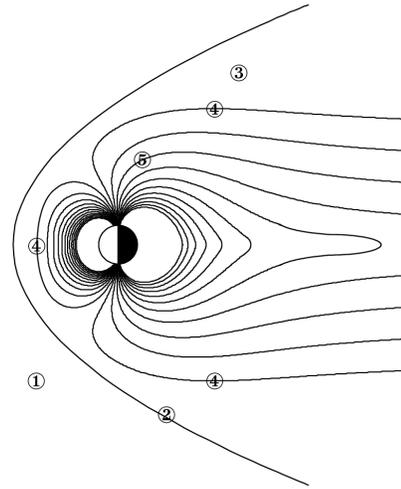


FIG. 3.— Sección transversal de la Magnetosfera terrestre. 1: Región Interplanetaria, 2: Onda de Choque, 3: Magnetofunda, 4: Magnetopausa, 5: Magnetosfera.

la Tierra alrededor del Sol), las líneas del campo interplanetario tienen la forma que se muestra en la Fig. 2, donde las flechas radiales muestran la dirección de flujo del viento solar, que en este caso tiene una velocidad promedio de 400 km/s . Fuera de este plano, la estructura de las líneas de campo es un poco más complicada, pero siempre es la combinación del movimiento radial del viento y la rotación del Sol.

Cerca del Sol, el ángulo que forma la línea de campo con la dirección radial es pequeño. Pero al aumentar la distancia, el ángulo aumenta y a la altura de la órbita de la Tierra es de unos 45° (Cravens 1997). Este ángulo, continúa aumentando con la distancia y en la órbita de Júpiter (unas 5 unidades astronómicas) ya tiene un valor cercano a 90° . La magnitud del campo transportado por el viento disminuye al alejarse del Sol, primero como el cuadrado de la distancia y luego ya solamente como $1/r$. Si el campo magnético del Sol no fuera transportado por el viento, decaería mucho más rápidamente, como $1/r^3$ (Bravo 1999). A la altura de la órbita de la Tierra, este campo tiene un valor de $5nT$. Por supuesto que estos valores son sólo promedios representativos. La dirección y la magnitud del campo magnético interplanetario varían dependiendo de la velocidad del viento solar y pueden tomar valores muy diversos en el viento transitorio originado por algún evento también transitorio de actividad del Sol.

2.5. La Magnetosfera de la Tierra

A su paso por el medio interplanetario ese plasma magnetizado que es el viento solar encuentra un obstáculo en el campo magnético de la Tierra, protegiendo a esta de su impacto directo. El viento solar no puede penetrar este escudo, por lo que sufre una deflexión que deja una cavidad en forma de cometa (véase la Fig. 3). En condiciones normales, el frente de la cavidad se encuentra a una distancia de alrededor de diez radios terrestres ($10r_T$) (Kivelson & Russell 1995) de la Tierra y su cola se extiende más allá de la órbita de la Luna, como a unos mil radios terrestres.

La cavidad del campo geomagnético o magnetosfera es una región de plasma que contiene partículas cargadas de un gran rango de energías, desde los cientos hasta los millones de electrón volts. Como puede apreciarse en la figura, frente a la magnetosfera se localiza una región muy extensa en la que la densidad, velocidad y presión del gas y del campo magnético sufren un salto brusco: una onda de choque. Ésta es una discontinuidad generada por el hecho de que el viento solar se mueve a velocidades supersónicas.

El campo geomagnético es empujado en la dirección del

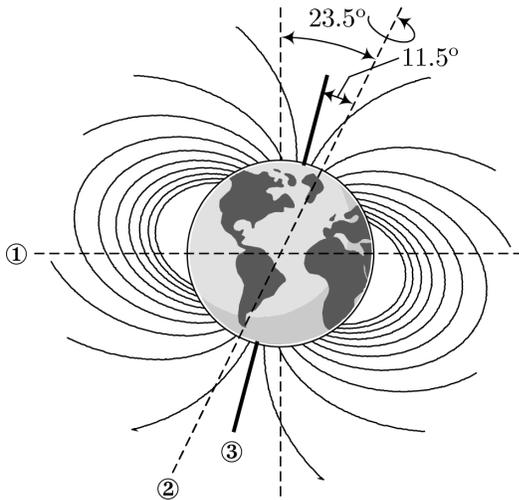


FIG. 4.— Campo geomagnético. En primera aproximación este puede ser considerado como el producido por un dipolo magnético. 1: Plano de la órbita de la Tierra, 2: Eje de rotación, 3: Eje magnético.

viento solar hasta que la presión de este iguale a la presión del campo geomagnético. La frontera donde estas dos presiones se balancean se denomina Magnetopausa. La Fig. 3 ilustra las principales regiones de la magnetosfera (Vilca Salinas 2001). Las regiones esquematizadas en la Fig. 3 son:

- Región Interplanetaria: Lugar donde las propiedades del medio no son afectadas por la Tierra y su campo magnético.
- La Magnetofunda: Es la región donde interactúan el viento solar con el campo geomagnético.
- Frente de choque: Separa la región interplanetaria de la magnetofunda.
- La Magnetopausa: El límite de la magnetosfera, separando el plasma unido a la Tierra del que viaja con el viento solar. Este se encuentra aproximadamente a una distancia de 10 radios terrestres ($10r_T$) a lo largo de una línea imaginaria Sol-Tierra.
- Magnetosfera: El ambiente más cercano de la Tierra, dominado por el campo magnético de la Tierra.

3. EL CAMPO GEOMAGNÉTICO

En primera aproximación el campo de la Tierra puede ser considerado como el producido por una barra de imán, con un momento magnético de $8.0 \times 10^{22} Am^2$, el cual estaría localizado cerca del centro de la Tierra. El campo en la superficie tiene una magnitud que va desde unos $30000 nT$ cerca del ecuador hasta unos $60000 nT$ cerca de los polos (Jankowski & Sucksdorff 1996). El eje a lo largo del imán se conoce como eje magnético que extendido hasta la superficie de la Tierra emerge en dos puntos llamados polos magnéticos. El eje magnético está inclinado aproximadamente 11.5° con respecto al eje de rotación de la Tierra (que a su vez forma un ángulo de 23.5° con la normal al plano de la órbita de la Tierra con respecto al Sol), de manera que el polo norte magnético se encuentra ubicado sobre la Tierra a 79.5° de latitud norte y 71.6° de longitud oeste, mientras que el polo sur magnético está a 79.5° de latitud sur y 108.4° de longitud este. En la Fig. 4 se muestra la forma de este campo magnético.

Si localizamos los polos en el globo terráqueo veremos que los puntos no son antípodas¹ y que el eje magnético, por lo tanto, no pasa por el centro de la Tierra. Se trata pues, de un dipolo que recibe el nombre de excéntrico. El eje magnético pasa por un punto que se encuentra directamente por debajo del Océano Pacífico medio, a unos $340 km$ del centro de la Tierra. El plano que se en-

¹ Definición para puntos diametralmente opuestos.

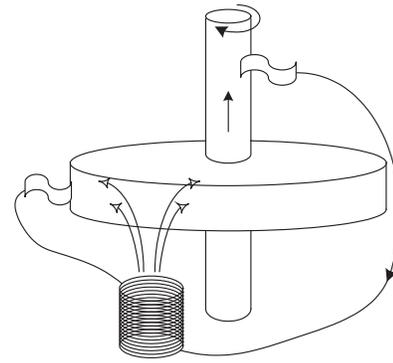


FIG. 5.— Dínamo auto-sustentado.

cuentra formando un ángulo recto con el eje geomagnético contiene lo que se conoce como ecuador magnético.

3.1. Origen del Campo Geomagnético

Actualmente es bien sabido que el 95% del campo magnético de la Tierra es producido en su interior. Por lo que, dentro de este existe un mecanismo que es capaz de generar y mantener el campo de un simple dipolo.

La explicación está en las propiedades y movimientos del núcleo de la Tierra, un cuerpo esférico de material metálico, probablemente de una composición níquel-hierro, cuya parte externa se encuentra en estado líquido. El diámetro del núcleo es de alrededor de $6920 km$, poco mayor que el radio terrestre. El núcleo se encuentra rodeado por el manto, consistente de roca semisólida y de un espesor de $2860 km$.

El magnetismo interno de la Tierra se explica por la llamada teoría del dínamo, según la cual el núcleo externo (de consistencia líquida) está dando vueltas lentamente, con respecto al manto semisólido, generando de esta manera corrientes eléctricas que rodean al núcleo. Estas corrientes generan a su vez un campo magnético, parte del cual escapa a la superficie de la Tierra, dándonos el campo magnético que observamos, y otra parte interactúa con el núcleo líquido que está en movimiento, sosteniendo de esta manera la acción del dínamo. La Fig. 5 muestra un esquema ilustrativo del funcionamiento del dínamo. Por algún mecanismo se pone a girar el disco (material conductor), entonces la presencia del campo magnético de un imán, inicialmente colocado cerca del disco, pone en movimiento las cargas libres del conductor gracias a la fuerza de Lorentz, produciéndose una corriente que circula por la bobina que a su vez genera un campo magnético el cual interactúa con el disco y así nuevamente se genera la corriente.

3.2. Componentes del campo Geomagnético

La intensidad del campo geomagnético es representada generalmente de dos maneras (Campbell 2003):

— Componentes *XYZ*: Tres componentes ortogonales entre sí, siendo *X* y *Y* componentes horizontales que apuntan hacia el Norte y Este respectivamente. *Z* es la componente que apunta hacia el centro de la Tierra.

— Componentes *HDI*: *H* es la magnitud de la componente horizontal que es considerada positiva cualquiera sea su dirección; *D* es la declinación magnética: ángulo que se mide desde la componente *X* hacia *H*; e *I* es el ángulo formado entre la intensidad total y la componente horizontal.

La gráfica de la Fig. 6 ilustra la relación existente entre estas componentes.

De la Fig. 6 por simple geometría la relación entre las variables

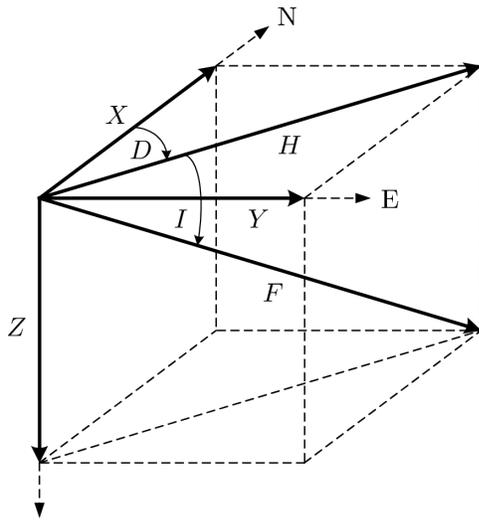


FIG. 6.— Componentes del campo geomagnético.

está dada por:

$$X = H \cos D \quad (1)$$

$$Y = H \sin D \quad (2)$$

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (3)$$

$$\tan I = \frac{Z}{H}. \quad (4)$$

En coordenadas esféricas, como se muestra en la Fig. 7, las direcciones más importantes son la colatitud θ , medida desde el polo norte geográfico a lo largo de una línea de longitud; el ángulo ϕ (longitud) que apunta hacia el este a lo largo de una línea de latitud, medida desde una longitud de referencia; y la dirección radial, r , que es medida desde el centro de la Tierra.

En la superficie de la tierra ($r = r_T$) el campo, \vec{B} , en coordenadas esféricas es

$$B_r \Big|_{r=r_T} = -Z, \quad B_\theta \Big|_{r=r_T} = -X \quad \text{y} \quad B_\phi \Big|_{r=r_T} = Y. \quad (5)$$

El sistema de referencia asociado a estas coordenadas es aquél cuyo eje z coincide con el eje de rotación de la Tierra.

3.2.1. Aproximación del Campo Geomagnético

Si suponemos que el polo norte geográfico coincide con el polo norte magnético, entonces, de acuerdo a la gráfica de la Fig. 6, la declinación es cero ($D = 0$). Por lo que las componentes geomagnéticas (ecuaciones (7)) se pueden aproximar a:

$$B_r \Big|_{r=r_T} = -Z, \quad B_\theta \Big|_{r=r_T} = -H \quad \text{y} \quad B_\phi \Big|_{r=r_T} = 0 \quad (6)$$

Esta aproximación será utilizada en una sección posterior (§4).

3.3. Variaciones del Campo Geomagnético

El campo geomagnético varía con el tiempo. La razón de cambio de las diferentes componentes no son uniformes y éstas pueden ser clasificadas de la siguiente manera (Cillis & Sciutto 2006):

— Variaciones Seculares: Son variaciones que se extienden durante varios años. Estos se originan por cambios en el interior de la Tierra y son generalmente incrementos y decrementos suaves y lentos. Los valores de la variación secular de las componentes del campo van desde $10nT$ por año a $150nT/\text{año}$.

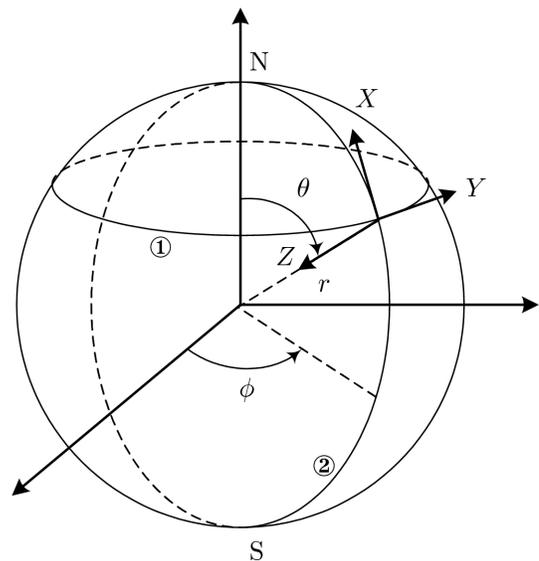


FIG. 7.— Componentes del campo geomagnético en coordenadas esféricas. 1: Línea de latitud, 2: Línea de longitud.

— Variaciones Periódicas: Se originan debido a la influencia de campos externos y en general equivalen a menos de $100nT$. Los periodos característicos son $12h$, 1 día , 27 días , 6 meses , 1 año , 11 años , 22 años , etc. Estas están relacionadas con la rotación de la tierra y la influencia del Sol y la Luna.

— Tormentas magnéticas: Son perturbaciones súbitas del campo magnético, las cuales pueden durar horas o varios días y modifican el campo en más de $500nT$.

Como puede apreciarse, el campo geomagnético principal es modificado por diferentes tipos de factores, razón por la cual es un tanto complicada la predicción en el tiempo del comportamiento de éste. Es por eso que el objetivo del presente trabajo es elaborar un modelo que pueda describir algunas de estas variaciones para cualquier punto del espacio.

Debido a la complejidad de tomar en cuenta todos los factores influyentes del campo, el modelo se restringirá a contemplar sólo las variaciones anuales y la influencia del campo magnético solar como una primera tentativa de describir las variaciones geomagnéticas.

Para poder darnos una idea del criterio utilizado en el planteamiento de la interacción Sol - Tierra, invocaremos al oscilador armónico simple, el cual se describe en la siguiente sección.

4. MODELO DE INTERACCIÓN

En la sección anterior se habló sobre el criterio que se utilizará para el planteamiento de la interacción Sol-Tierra, pero no se habló nada sobre cuáles son las ecuaciones homogénea e inhomogénea correspondientes al problema. Esta sección se dedica a esclarecer este tema además de describir las propuestas para las soluciones de estas ecuaciones.

La ecuación diferencial homogénea es la ecuación de difusión de la magnetohidrodinámica, la cual es resuelta a partir de los resultados de Mendoza & Morales (2004) quienes proponen un modelo estático ($\partial \vec{B} / \partial t = 0$) para la deformación del campo geomagnético debido a la presencia del viento solar. Específicamente, se introducen tres mejoras a este modelo; la variación en el tiempo del campo geomagnético (producto de la traslación de la Tierra); la inclinación del dipolo terrestre y la introducción de una solución inhomogénea como consecuencia de un agente perturbador.

Antes de empezar el planteamiento, es necesario recalcar qué factores se están tomando en cuenta en el modelo. Como se desea determinar las variaciones del campo geomagnético debidas a la

influencia magnética del Sol, esto significa que dentro del marco de trabajo están presentes sólo un dipolo magnético inclinado (campo geomagnético) afectado por un plasma (viento solar), el cual trae las variaciones magnéticas provenientes del Sol y es el vínculo entre los dos entes. Es decir que la ecuación diferencial a resolver debe contemplar estos factores.

A continuación se describe la construcción del modelo.

4.1. Ecuación Diferencial Homogénea

La ecuación de difusión de la Magnetohidrodinámica describe el comportamiento espacial y temporal de un campo magnético ligado a un medio de conductividad σ (plasma) el cual se mueve con velocidad \vec{v} , relativa a un observador fijo. Esta ecuación puede ser deducida de las ecuaciones de Maxwell y la ley de Ohm:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}, \quad (10)$$

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (11)$$

Combinando las ecuaciones anteriores obtenemos la ecuación de difusión.

$$\frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \vec{B} + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (12)$$

Ya que esta ecuación contempla características afines al problema, será la ecuación a resolver.

En nuestro caso \vec{v} es la velocidad del viento solar y σ la conductividad del mismo.

Por cuestiones de simplicidad se reescribirá la ecuación de difusión en función del potencial magnético \vec{A} . Para ello tomemos en cuenta que:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi_e - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (13)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (14)$$

donde ϕ_e es el potencial escalar.

Reemplazando las ecuaciones (13), (14) y (11) en (10) tenemos:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{\mu_0 \sigma} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{v} + \frac{\epsilon_0}{\sigma} \frac{\partial \phi_e}{\partial t} + \phi_e \right) = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \vec{A} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - \frac{\epsilon_0}{\sigma} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (15)$$

donde se ha supuesto $\vec{v} = ctte$.

Para resolver la ecuación (15) usaremos la condición

$$\frac{1}{\mu_0 \sigma} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{v} = 0 \quad (16)$$

para el potencial vector y la condición

$$\frac{\epsilon_0}{\sigma} \frac{\partial \phi_e}{\partial t} + \phi_e = 0 \quad (17)$$

para el potencial escalar. De las soluciones obtenidas se escogerán aquellas que satisfagan la condición (16). Entonces, la ecuación a resolver para cada componente es:

$$\frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \vec{A} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = \frac{\epsilon_0}{\sigma} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (18)$$

La ecuación (18) es la denominada ecuación homogénea² la cual debe contemplar solamente una frecuencia (la de rotación de la tierra alrededor del Sol).

Notemos que las ecuaciones (17) y (18) nos permiten hallar ϕ_e y \vec{A} con las cuales es posible obtener \vec{E} a través de la ecuación (13).

4.1.1. Solución

Para resolver la ecuación (18) se propone una solución para cada componente de la forma

$$A = A' e^{i(\omega t + \beta)}, \quad (19)$$

con la que se obtiene una ecuación para el espacio:

$$\frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 A' - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) A' - a_t A' = 0, \quad (20)$$

$$a_t = -\frac{\epsilon_0}{\sigma} \omega^2 + i\omega.$$

Ahora se propone una solución para esta ecuación (20), ésta es de la forma:

$$A' = \phi A''. \quad (21)$$

Además se asume que la velocidad del viento solar es constante y que puede ser escrita como el gradiente de un potencial escalar:

$$\vec{v} = -\vec{\nabla} \phi_v, \quad (22)$$

Trabajando con las ecuaciones (20), (21) y (22) obtenemos dos ecuaciones diferenciales

$$\vec{\nabla} \phi = -\frac{\phi}{2\eta} \vec{\nabla} \phi_v, \quad (23)$$

$$\nabla^2 A'' - j^2 A'' = 0 \quad (24)$$

donde $\eta = 1/\mu_0 \sigma$ (viscosidad magnética) y $j^2 = (v/2\eta)^2 + a_t/\eta$. La ecuación (24) es conocida como la ecuación de Helmholtz modificada, cuyas soluciones están dadas en términos de los funciones esféricas de Bessel modificadas y los armónicos esféricos.

$$A'' = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_{lm} i_l(jr) + b_{lm} k_l(jr)] Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (25)$$

La solución de la ecuación (23) puede ser hallada por integración directa e igualando componentes. Esta solución es:

$$\phi = c_1 e^{(v/2\eta)x}, \quad (26)$$

donde se ha asumido $\vec{v} = v\hat{e}_x$, ya que como veremos mas adelante, \hat{e}_x es asumida como la dirección del viento solar.

Haciendo $k = v/2\eta$, la solución general es

$$A = c_1 e^{kx} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_{lm} i_l(jr) + b_{lm} k_l(jr)] Y_{lm}(\theta, \phi) e^{i(\omega t + \beta)}. \quad (27)$$

Como deseamos soluciones convergentes podemos hacer $a_{lm} = 0$.

² A diferencia de este trabajo, Mendoza & Morales (2004) se abocan a resolver la parte estacionaria de la ecuación (18) ($\frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \vec{A} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = 0$).

$$A = c_1 e^{kx} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l b_{lm} k_l(jr) Y_{lm}(\theta, \phi) e^{i(\omega t + \beta)}. \quad (28)$$

El parámetro k es un eigenvalor del problema, dependiente de v y η que son parámetros para cada punto del espacio. Estricta-

mente la ecuación (28) debe contemplar una integral sobre k con $b_{lm}(k)$. Pero esto dificultaría en gran manera la resolución pues se necesitaría $\vec{v}(\vec{r})$ y $\eta(\vec{r})$. Entonces, por simplicidad asumiremos dados los valores para v y η o bien para k en cada punto del espacio.

Expandiendo la ecuación (28) desde $l = 0$ hasta $l = 1$

$$A = c_1 e^{kx} \left\{ b_{00} \frac{e^{-jr}}{jr} e^{i(\omega t + \beta)} + b_{1-1} \frac{e^{-jr-i\phi}(jr+1)\sin\theta}{j^2 r^2} e^{i(\omega t + \beta)} + b_{10} \frac{e^{-jr}(jr+1)\cos\theta}{j^2 r^2} e^{i(\omega t + \beta)} - b_{11} \frac{e^{-jr+i\phi}(jr+1)\sin\theta}{j^2 r^2} e^{i(\omega t + \beta)} \dots \right\}. \quad (29)$$

La solución (28) contempla una infinidad de soluciones, muchas de las cuales no son de nuestro interés, por lo que es necesario seleccionar soluciones apropiadas, las cuales deban obedecer ciertas propiedades del problema.

4.1.2. Selección de las Soluciones

El procedimiento usual, una vez determinada la solución general de cualquier ecuación diferencial, es aplicar las condiciones de contorno del problema en particular. Lo que se hará a continuación es hacer un procedimiento semejante a este, utilizando un punto de vista más didáctico, de tal modo de escoger soluciones que describen las variaciones temporales del potencial geomagnético.

Cuando la Tierra da una vuelta completa alrededor del Sol, un observador en un sistema de referencia de la Fig. 8, donde el eje x es en todo momento paralelo a la dirección del viento solar, ve un dipolo geomagnético precesar alrededor del eje z con un periodo de un año. Esto significa que la componente en la dirección z del momento dipolar geomagnético no varía en el tiempo mientras que las dos componentes restantes sí lo hacen. Es decir,

$$\begin{aligned} m_x &= m \sin \alpha \cos(\omega t + \beta) \\ m_y &= m \sin \alpha \sin(\omega t + \beta) \\ m_z &= m \cos \alpha. \end{aligned} \quad (30)$$

Todo esto nos da una idea de lo que uno esperaría, en el supuesto caso que tuviésemos un dipolo puro como campo geomagnético. Esto es, en el sistema de referencia mencionado, la forma del potencial dipolar es (Jackson 1999):

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} (-\cos \alpha \sin \theta \sin \phi + \sin \alpha \sin(\omega t + \beta) \cos \theta) \\ A_y &= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} (\cos \alpha \sin \theta \cos \phi - \sin \alpha \cos(\omega t + \beta) \cos \theta) \\ A_z &= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \sin \alpha \sin \theta (\cos(\omega t + \beta) \sin \phi - \sin(\omega t + \beta) \cos \phi) \end{aligned} \quad (31)$$

donde ω es la frecuencia de traslación de la Tierra, α la inclinación del momento dipolar y β una fase cualquiera. Es esta la forma que deben tener las soluciones que se buscan para cada componente. Es decir, según las ecuaciones (31), en las soluciones buscadas:

— Todos los términos deben tener dependencia $1/r^2$.

— El primer término de las componentes A_x y A_y no debe tener dependencia temporal ($\omega = 0$), mientras que los restantes términos de todas las componentes si presentan esta dependencia.

— Los términos de las componentes A_x , A_y y A_z del modelo tienen que tener la misma dependencia angular que presentan los términos de las componentes respectivas del dipolo puro.

— Los términos deben satisfacer la condición expresada en la ecuación (16).

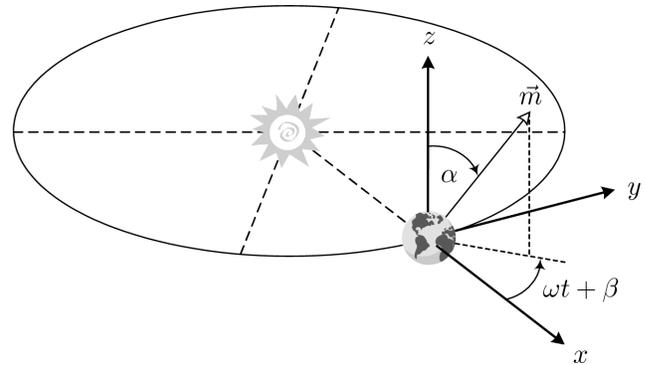


FIG. 8.— Sistema de referencia asociado al potencial geomagnético.

Tomando en cuenta las consideraciones recién mencionadas, los términos escogidos para cada componente son:

$$\begin{aligned} A_x &= M \left(-\frac{e^{k(x-r)} y (kr+1) \cos \alpha}{r^3} + \frac{e^{kx-jr} e^{i(\beta+\omega t)} z (jr+1) \sin \alpha}{r^3} \right), \\ A_y &= M \left(e^{k(x-r)} \left(\frac{x(kr+1)}{r^3} + \frac{k}{r} \right) \cos \alpha - \frac{e^{kx-jr} e^{i(\beta+\omega t)} z (jr+1) \sin \alpha}{r^3} \right), \\ A_z &= M \left(\frac{e^{kx-jr} e^{i(\beta+\omega t)} y (jr+1) \sin \alpha}{r^3} - e^{kx-jr} e^{i(\beta+\omega t)} \left(\frac{x(jr+1)}{r^3} + \frac{k}{r} \right) \sin \alpha \right), \end{aligned} \quad (32)$$

donde $M = \frac{\mu_0 m}{4\pi}$.

4.1.3. Partes Real e Imaginaria

El conducto regular en la obtención de la solución final es tomar la parte real de la solución compleja, este no será el caso, debido al proceso seguido en la sección anterior de Selección de las Soluciones. En esta sección, esencialmente se busca, en la solución general, la forma de un dipolo magnético, por lo tanto, siguiendo este mismo procedimiento se toma la parte real o imaginaria de cada término de las ecuaciones (32) que tenga forma compleja. La condición de tomar la parte real o imaginaria es que

el término final tiene que tomar la forma del término respectivo del dipolo magnético (ecuaciones 31), esto esencialmente en lo que respecta a la parte temporal. Es así que

$$\begin{aligned} A_x &= A_{x1} + \text{Im}[A_{x2}] \\ A_y &= A_{y1} + \text{Re}[A_{y2}] \\ A_z &= \text{Re}[A_{z1}] + \text{Im}[A_{z2}]. \end{aligned} \quad (33)$$

O bien, explícitamente:

$$\begin{aligned} A_x &= Me^{kx} \left(-\frac{e^{-kr}(kr+1)y \cos \alpha}{r^3} + \frac{e^{-ar}z \sin \alpha (br \cos(br-\beta-\omega t) - (ar+1) \sin(br-\beta-\omega t))}{r^3} \right) \\ A_y &= Me^{kx} \left(e^{-kr} \left(\frac{k}{r} + \frac{(kr+1)x}{r^3} \right) \cos \alpha - \frac{e^{-ar}z \sin \alpha ((ar+1) \cos(br-\beta-\omega t) + br \sin(br-\beta-\omega t))}{r^3} \right) \\ A_z &= Me^{kx-ar} \sin \alpha \left(\frac{y((ar+1) \cos(br-\beta-\omega t) + br \sin(br-\beta-\omega t))}{r^3} - \frac{brx \cos(br-\beta-\omega t) - (kr^2 + axr + x) \sin(br-\beta-\omega t)}{r^3} \right) \end{aligned} \quad (34)$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1}{2}(k^2 - \mu_0 \epsilon_0 \omega^2) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega^2}{\eta^2} + (k^2 - \mu_0 \epsilon_0 \omega^2)^2}} \\ b &= \sqrt{\frac{1}{2}(\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 - k^2) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega^2}{\eta^2} + (k^2 - \mu_0 \epsilon_0 \omega^2)^2}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Nótese que en el límite de $\omega = 0$ (no existe movimiento de traslación) y $k = 0$ (no hay viento solar) las ecuaciones (34) se reducen a las ecuaciones (31).

4.1.4. Sistema de Referencia

El potencial (34) describe el comportamiento espacial y temporal del campo magnético para un observador en el sistema de referencia de la Fig. 8. Por esta razón y con el fin de hacer comparaciones con los datos observacionales, se hará el cambio de este sistema al sistema de los datos. El sistema de referencia de los datos es aquél descrito en la sección 3.2 donde el eje z de este coincide con el eje de rotación de la Tierra. Debe mencionarse, por otro lado, que el momento dipolar magnético de la Tierra durante el transcurso de un día da una vuelta alrededor del eje de rotación, lo cual como es de esperarse, también produce variaciones en el campo geomagnético. Pero como el presente trabajo solo se dedica a estudiar variaciones del campo durante periodos largos de tiempo, entonces, la variación diaria no es de nuestro interés y por ende no se tomará en cuenta.

Es por eso que en este punto debemos invocar a la aproximación del campo geomagnético descrita en la subsección 3.2.1. Esta aproximación esta relacionada con el hecho de que en el transcurso de un día, en promedio, la ubicación espacial del eje magnético coincide con el eje de rotación de la Tierra, por lo que

el ángulo del momento dipolar respecto de la normal a la órbita terrestre será de aproximadamente $\alpha = 23^\circ.5$.

En la Fig. 9 se ilustran dos sistemas de referencia. El Primer sistema xyz es el sistema de la Fig. 8 mientras que el segundo $x'y'z'$ es el sistema aproximado de los datos, según lo descrito recientemente. El eje z' coincide con el eje de rotación de la Tierra y el eje magnético.

Podemos hacer la transformación del sistema xyz al sistema $x'y'z'$ por medio de tres rotaciones sucesivas (Goldstein et al.

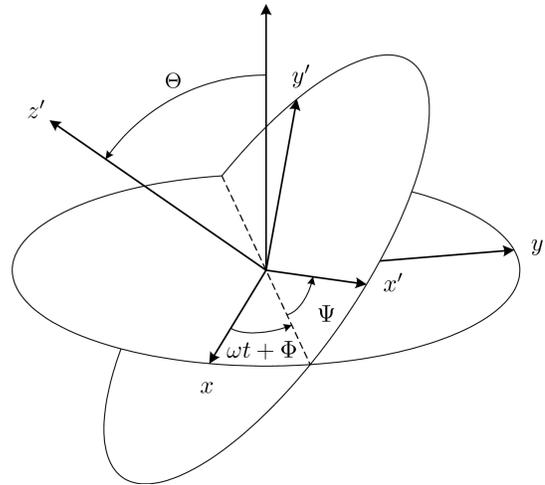


FIG. 9.— Sistema de referencia primado: asociado a las componentes geomagnéticas. Sistema de referencia no primado: sistema de la Fig. 8.

2000). Cada paso implica una rotación descrita por un ángulo de Euler. La transformación final E será el producto de tres matrices de rotación:

$$E = \begin{pmatrix} \cos \Psi \cos(\omega t + \Phi) - \cos \Theta \sin \Psi \sin(\omega t + \Phi) & \cos \Theta \cos(\omega t + \Phi) \sin \Psi + \cos \Psi \sin(\omega t + \Phi) & \sin \Theta \sin \Psi \\ -\cos(\omega t + \Phi) \sin \Psi - \cos \Theta \cos \Psi \sin(\omega t + \Phi) & \cos \Theta \cos \Psi \cos(\omega t + \Phi) - \sin \Psi \sin(\omega t + \Phi) & \cos \Psi \sin \Theta \\ \sin \Theta \sin(\omega t + \Phi) & -\cos(\omega t + \Phi) \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \quad (36)$$

Es decir que el potencial magnético en el sistema de referencia primado es:

$$\vec{A}' = E\vec{A}, \quad (37)$$

y la transformación de las componentes x , y y z es:

$$\vec{r} = E^{-1}\vec{r}'. \quad (38)$$

Puede apreciarse, comparando las Figs. 8 y 9, que $\alpha = \Theta$ y $\beta = \Phi + 3\pi/2$.

Utilizando las anteriores ecuaciones, el potencial en el sistema primado y en coordenadas esféricas será:

$$A_r = M \frac{e^{kx} k}{r} \{ e^{-kr} \cos(\Phi + \omega t) \sin \theta \sin(\phi + \Psi) \cos^2 \Theta + e^{-ar} \cos \theta \cos(br - \Phi - t\omega) \sin \Theta \cos \Theta - e^{-kr} \cos \theta \cos(\Phi + \omega t) \sin \Theta \cos \Theta + e^{-kr} \cos(\phi + \Psi) \sin \theta \sin(\Phi + \omega t) \cos \Theta + e^{-ar} \cos(br - \Phi - \omega t) \sin \theta \sin^2 \Theta \sin(\phi + \Psi) \} \quad (39)$$

$$A_\theta = M e^{kx} \left\{ \frac{e^{-kr} k}{r} \cos \theta \cos(\Phi + \omega t) \sin(\phi + \Psi) \cos^2 \Theta + \frac{e^{-kr} (kr + 1)}{r^2} \cos(\phi + \Psi) \sin \Theta \cos \Theta - \frac{e^{-ar} (ar + 1)}{r^2} \cos(br) \cos(\phi + \Psi) \sin \Theta \cos \Theta - \frac{be^{-ar}}{r} \cos(\phi + \Psi) \sin(br) \sin \Theta \cos \Theta - \frac{e^{-ar} k}{r} \cos(br - \Phi - \omega t) \sin \theta \sin \Theta \cos \Theta + \frac{e^{-kr} k}{r} \cos(\Phi + \omega t) \sin \theta \sin \Theta \cos \Theta + \frac{e^{-kr} k}{r} \cos \theta \cos(\phi + \Psi) \sin(\Phi + \omega t) \cos \Theta + \frac{e^{-ar} k}{r} \cos \theta \cos(br - \Phi - \omega t) \sin^2 \Theta \sin(\phi + \Psi) - \frac{be^{-ar}}{r} \cos(br) \sin \Theta \sin(\phi + \Psi) + \frac{e^{-ar} (ar + 1)}{r^2} \sin(br) \sin \Theta \sin(\phi + \Psi) \right\} \quad (40)$$

$$A_\phi = M e^{kx} \left\{ \frac{e^{-kr} k}{r} \cos(\phi + \Psi) \cos(\Phi + \omega t) \cos^2 \Theta + \frac{e^{-kr} (kr + 1)}{r^2} \sin \theta \cos^2 \Theta - \frac{e^{-kr} (kr + 1)}{r^2} \cos \theta \sin \Theta \sin(\phi + \Psi) \cos \Theta + \frac{e^{-ar} (ar + 1)}{r^2} \cos(br) \cos \theta \sin \Theta \sin(\phi + \Psi) \cos \Theta + \frac{be^{-ar}}{r} \cos \theta \sin(br) \sin \Theta \sin(\phi + \Psi) \cos \Theta - \frac{e^{-kr} k}{r} \sin(\phi + \Psi) \sin(\Phi + \omega t) \cos \Theta + \frac{e^{-ar} k}{r} \cos(\phi + \Psi) \cos(br - \Phi - \omega t) \sin^2 \Theta + \frac{e^{-ar}}{r^2} (ar + 1) \cos(br) \sin \theta \sin^2 \Theta + \frac{be^{-ar}}{r} \sin(br) \sin \theta \sin^2 \Theta - \frac{be^{-ar}}{r} \cos(br) \cos \theta \cos(\phi + \Psi) \sin \Theta + \frac{e^{-ar} (ar + 1)}{r^2} \cos \theta \cos(\phi + \Psi) \sin(br) \sin \Theta \right\} \quad (41)$$

Debe tomarse en cuenta que A_r , A_θ , A_ϕ además de las variables r , θ y ϕ de las ecuaciones anteriores son variables primadas correspondientes al sistema $x'y'z'$.

Utilizando la relación $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ obtenemos el campo magnético en el sistema deseado. No se toma en cuenta la componente B_ϕ debido a la aproximación de la subsección 3.2.1.

Normalizamos las componentes del campo magnético en unidades de radios terrestres (r_T). Este cálculo da como resultado las mismas ecuaciones, excepto que los parámetros k , a , b , M y r son redefinidos como:

$$k \rightarrow k', \quad a \rightarrow a', \quad b \rightarrow b', \quad M \rightarrow M', \quad r \rightarrow r', \quad (42)$$

donde estos nuevos parámetros se definen como

$$k' = kr_T, \quad a' = ar_T, \quad b' = br_T, \quad M' = M/r_T^3, \quad r' = r/r_T. \quad (43)$$

Además que las ecuaciones (35) se convierten en

$$a'^2 = \frac{1}{2} \left(k'^2 - \frac{\omega^2 r_T^2}{c^2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2\omega r_T k'}{v} \right)^2 + \left(k'^2 - \frac{\omega^2 r_T^2}{c^2} \right)^2} \\ b'^2 = -\frac{1}{2} \left(k'^2 - \frac{\omega^2 r_T^2}{c^2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2\omega r_T k'}{v} \right)^2 + \left(k'^2 - \frac{\omega^2 r_T^2}{c^2} \right)^2}, \quad (44)$$

donde se ha utilizado $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ y $k = v/2\eta$.

4.1.5. Aproximación³

Con el fin de obtener un modelo simple que a la vez responda adecuadamente a las variaciones que se quiere modelar, se aproximarán las ecuaciones a una forma más sencilla.

En las ecuaciones (44), veamos como es el parámetro k' en comparación con los otros parámetros físicos:

³ Debe mencionarse en este punto que esta aproximación es producto de un tratamiento *a posteriori*, consecuencia del análisis y el contraste de los datos observacionales con el modelo final completo.

Tomado en cuenta que $k' \sim 10^{-4}$, $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, $r_T = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$, $\omega = 2\pi/a\tilde{n}o$ y $v = 400 \text{ km/s}$ (velocidad promedio del plasma) el orden de magnitud de los términos es;

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2 r_T^2}{c^2} &\sim 10^{-17} \\ \left(\frac{2\omega r_T k'}{v}\right)^2 &\sim 10^{-10}. \end{aligned} \quad (45)$$

Esto nos dice claramente que k' es grande comparado con los términos (45), por lo que las ecuaciones (44) se pueden aproximar como

$$\begin{aligned} a' &\approx k' \\ b' &\approx 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Utilizando la aproximación anterior, las componentes B_r y B_θ se reducen a:

$$\begin{aligned} B_r = Z = -M' \frac{2\cos\theta}{r'^3} e^{k'r'u(t)} \left\{ 1 + k'r' + \frac{1}{2}k'^2 r'^2 (\cos^2\Theta + \right. \\ \left. \cos^2(\omega t + \Phi) \sin^2\Theta - \right. \\ \left. \sin\Theta \sin(\omega t + \Phi) (\cos\xi \cos(\omega t + \Phi) - \right. \\ \left. \cos\Theta \sin\xi \sin(\omega t + \Phi)) \tan\theta + \right. \\ \left. \frac{1}{2}k'r'(k'r' + 1) (\cos\xi \cos(\omega t + \Phi) \sin\theta - \right. \\ \left. \sin\theta \sin(\omega t + \Phi) (\cos\Theta \sin\xi + \sin\Theta \tan\theta)) \right\} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} B_\theta = H = -M' \frac{\sin\theta}{r'^3} e^{k'r'u(t)} \left\{ 1 + k'r' + \right. \\ \left. k'r'((k'r' + 1) \cos\theta - k'r' \sin\Theta \sin(\omega t + \Phi)) \right. \\ \left. (\cos\xi \cot\theta \cos(\omega t + \Phi) - \right. \\ \left. (\sin\Theta + \cos\Theta \cot\theta \sin\xi) \sin(\omega t + \Phi)) \right\} \end{aligned} \quad (48)$$

siendo

$$\begin{aligned} u(t) &= \cos\xi \sin\theta \cos(\omega t + \Phi) + \\ &(\cos\theta \sin\Theta - \cos\Theta \sin\theta \sin\xi) \sin(\omega t + \Phi) - 1 \\ \text{y} \quad \xi &= \phi + \Psi \end{aligned} \quad (49)$$

4.1.6. Ecuación de Ajuste

Una de las variaciones que presenta los datos observacionales es la tendencia secular. La tendencia secular es el incremento o disminución de las componentes geomagnéticas a lo largo de varios años, relacionado principalmente con el geodínamo interno. Esta variación no está contemplada por el modelo lo cual en lo futuro exigirá un tratamiento adecuado de los datos de tal manera que estos queden desafectados de variación secular. Dando por hecho este tratamiento, el proceso arrojaría como resultado componentes H y Z sin campo principal⁴, quedando solo las fluctuaciones alrededor de este campo. Entonces, adecuando el modelo a esta futura situación restamos a H y Z el valor del campo principal que está dado por las componentes dipolares respectivas:

$$B_r = \frac{\mu_0 m}{4\pi r_T^3} \frac{2\cos\theta}{r'^3}, \quad B_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi r_T^3} \frac{\sin\theta}{r'^3}. \quad (50)$$

Por lo que el modelo final normalizado que representa las fluctuaciones anuales alrededor del campo principal es:

⁴ En primera aproximación mas del 90% del campo principal de la Tierra puede ser considerado como dipolar (Jankowski & Sucksdorf 1996).

$$\begin{aligned} Z = -M' \frac{2\cos\theta}{r'^3} \left\{ e^{k'r'u(t)} \left[1 + k'r' + \frac{1}{2}k'^2 r'^2 (\cos^2\Theta + \right. \right. \\ \left. \left. \cos^2(\omega t + \Phi) \sin^2\Theta - \right. \right. \\ \left. \left. \sin\Theta \sin(\omega t + \Phi) (\cos\xi \cos(\omega t + \Phi) - \right. \right. \\ \left. \left. \cos\Theta \sin\xi \sin(\omega t + \Phi)) \tan\theta + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{2}k'r'(k'r' + 1) (\cos\xi \cos(\omega t + \Phi) \sin\theta - \right. \right. \\ \left. \left. \sin\theta \sin(\omega t + \Phi) (\cos\Theta \sin\xi + \sin\Theta \tan\theta)) \right] - 1 \right\} \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} H = -M' \frac{\sin\theta}{r'^3} \left\{ e^{k'r'u(t)} \left[1 + k'r' + \right. \right. \\ \left. \left. k'r'((k'r' + 1) \cos\theta - k'r' \sin\Theta \sin(\omega t + \Phi)) \right. \right. \\ \left. \left. (\cos\xi \cot\theta \cos(\omega t + \Phi) - \right. \right. \\ \left. \left. (\sin\Theta + \cos\Theta \cot\theta \sin\xi) \sin(\omega t + \Phi)) \right] - 1 \right\}, \end{aligned} \quad (52)$$

donde $M' = \frac{\mu_0 m}{4\pi r_T^3}$ y $r' = r_T$.

Utilizando el parámetro M' podemos obtener el momento dipolar magnético

$$m = \frac{4\pi r_T^3 M'}{\mu_0}. \quad (53)$$

4.1.7. Líneas de Campo

Ahora que se tiene la forma final del potencial geomagnético, utilizando $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ en las ecuaciones (34), veamos cual es la forma de las líneas del campo magnético en el sistema de referencia xyz . Para ello utilizaremos la misma normalización de la sección 4.1.4 y la aproximación de la sección 4.1.5.

Una línea de cualquier campo magnético \vec{B} es definida como una curva que es tangente en cualquier lugar a la magnitud \vec{B} (Parks 2004). Si \vec{dl} es una longitud de arco, las líneas de campo son definidas por la ecuación diferencial

$$\vec{dl} \times \vec{B} = 0. \quad (54)$$

En coordenadas cartesianas (54) se reduce a:

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}. \quad (55)$$

Las gráficas de las Figs. 10—12 muestran la solución numérica de (55) para diferentes valores de k' y t .

Notemos que en esencia el potencial (34) obtenido es un dipolo modificado por la presencia del viento solar. Las líneas de campo son arrastradas en la dirección del viento solar que en todos los casos es la dirección del eje x positivo.

4.2. Ecuación Diferencial Inhomogénea

Para poder determinar una función que pueda describir la variación del campo principal geomagnético debida a la influencia del Sol, como se mencionó antes se utilizará el criterio del oscilador armónico simple en cuanto a la existencia de un agente perturbador sobre la oscilación natural.

Entonces la ecuación inhomogénea a resolver es:

$$\frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \vec{A} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - \frac{\epsilon_0}{\sigma} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = F(t) \quad (56)$$

Como se ve, queda el problema de averiguar cuál es la forma $F(t)$ de la perturbación externa. Para ello nos apoyamos en el artículo de Benevolenskaya (1998), el cual propone un modelo

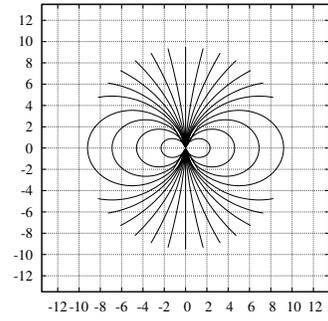
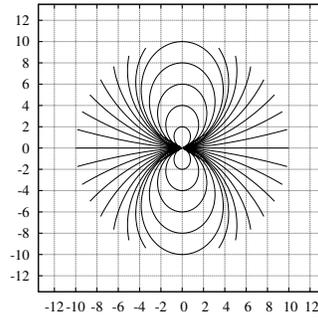
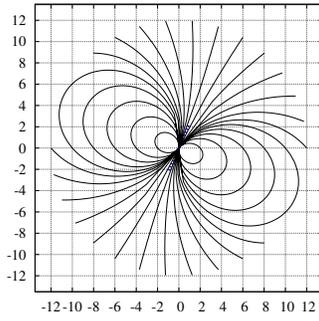
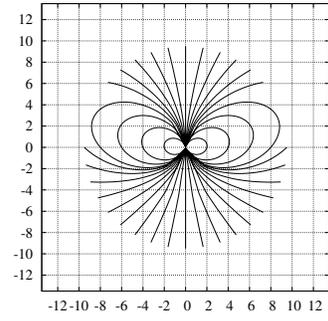
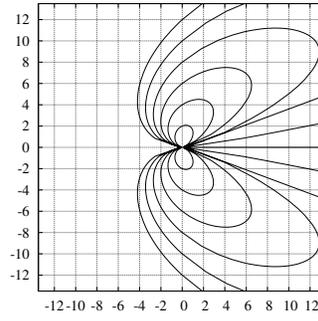
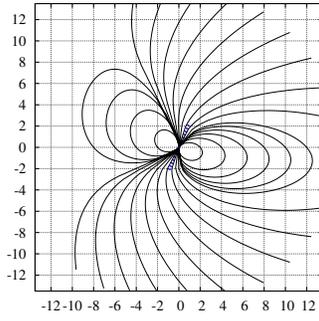
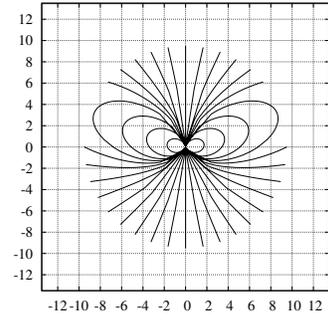
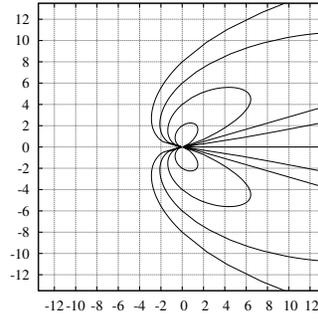
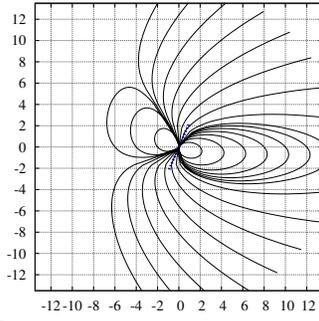
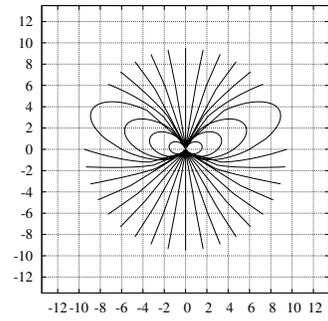
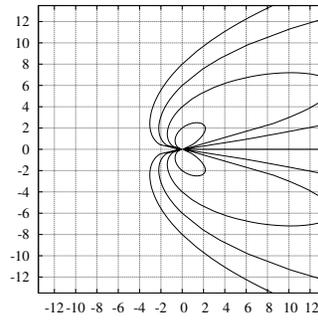
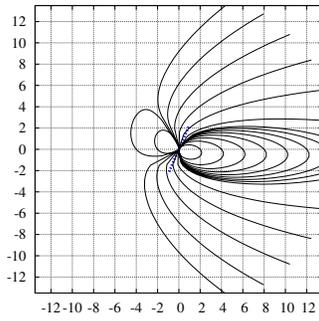
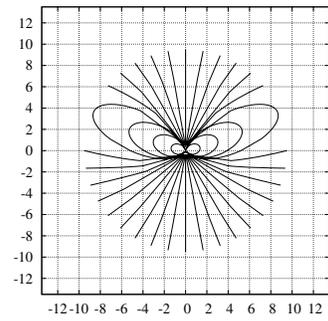
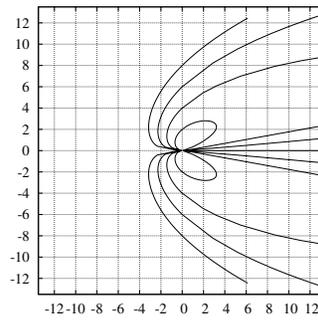
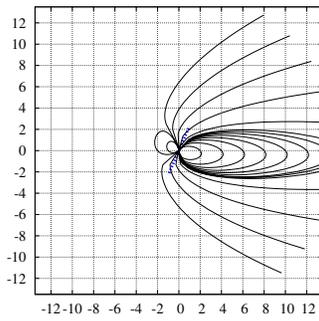
$k' = 0$  $k' = 0.25$  $k' = 0.5$  $k' = 0.75$  $k' = 1$ Plano $x-z$ Plano $x-y$ Plano $y-z$

FIG. 10.— Comportamiento de las líneas de campo del modelo para diferentes valores de k' . Todas las gráficas están dadas para $M' = 30100nT$, $\omega = 2\pi/año$, $\alpha = 23^\circ.5$, $\beta = 0$ y $t = 1$ año. Las unidades de los ejes de los diferentes planos están dadas en radios terrestres. En los planos $x-z$ y $x-y$ el Sol está situado a la izquierda del origen; en el plano $y-z$ el Sol se encuentra al frente de éste. En el plano $x-z$ se denota con una línea punteada la dirección del momento dipolar.

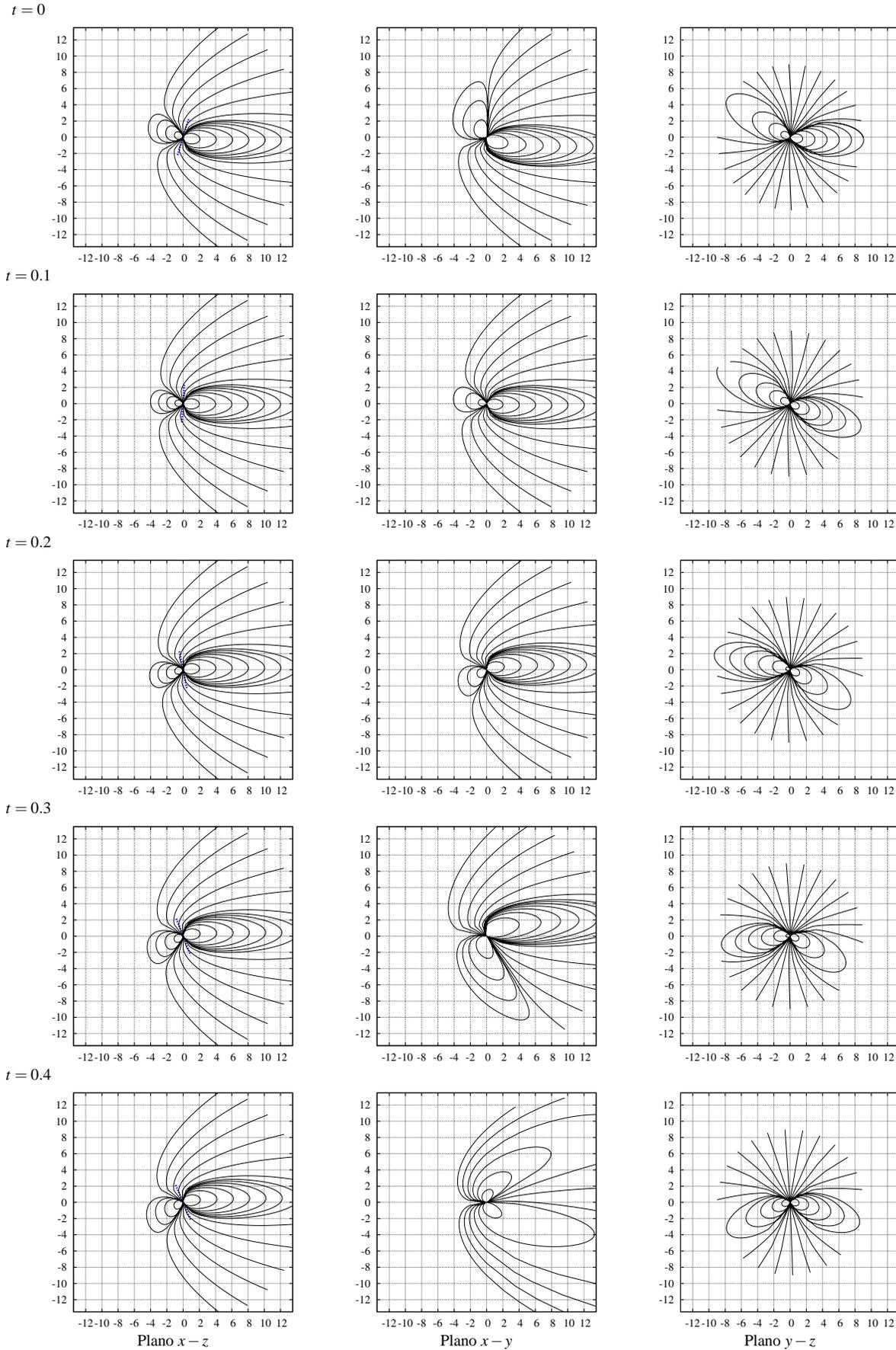


FIG. 11.— Comportamiento de las líneas de campo del modelo en el transcurso de un año. Todas las gráficas están dadas para $M' = 30100nT$, $k' = 0.75$, $\omega = 2\pi/año$, $\alpha = 23^\circ.5$ y $\beta = 45^\circ$. Las unidades de los ejes de los diferentes planos están dadas en radios terrestres. Las unidades del tiempo t están en años. En los planos $x-z$ y $x-y$ el Sol está situado a la izquierda del origen; en el plano $y-z$ el Sol se encuentra al frente de éste. En el plano $x-z$ se denota con una línea punteada la dirección del momento dipolar.

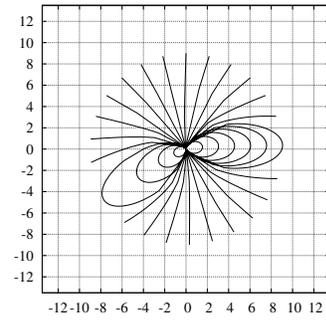
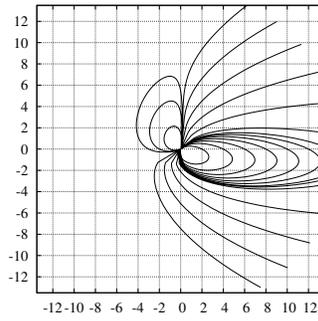
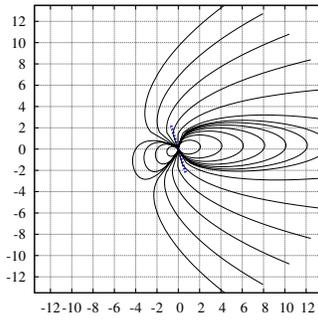
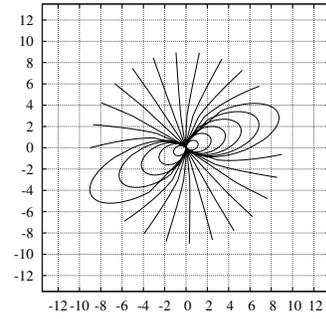
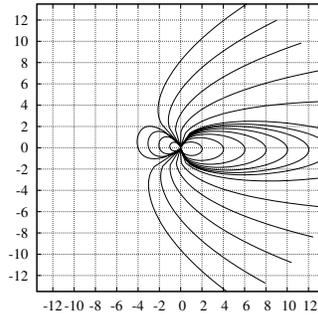
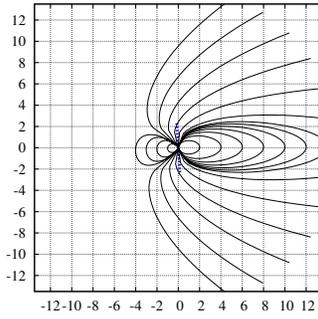
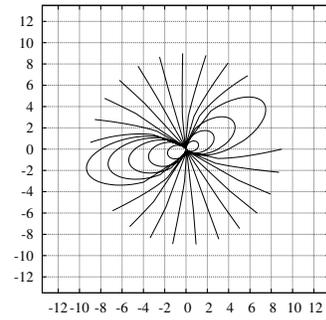
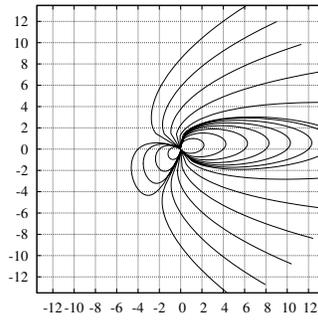
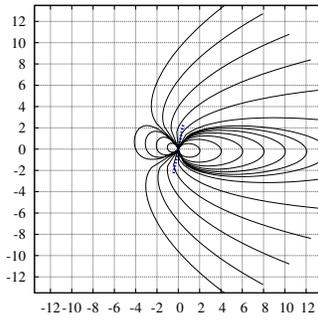
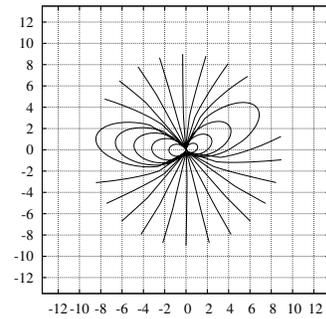
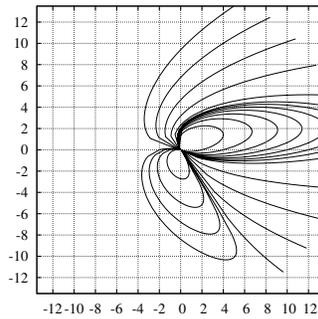
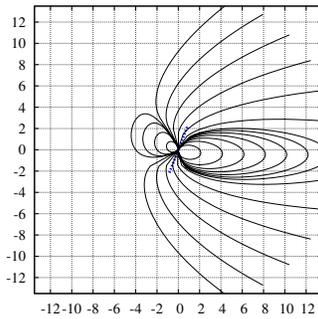
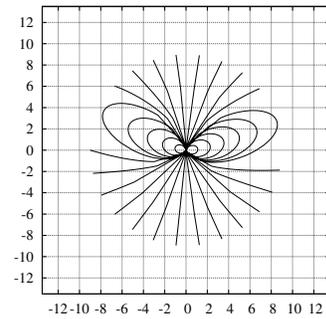
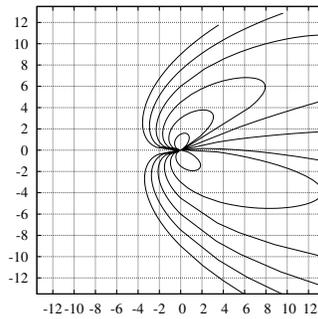
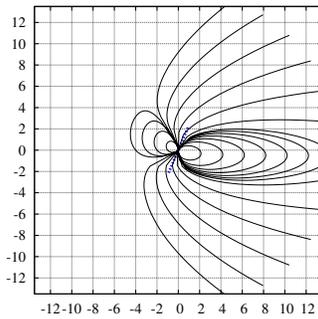
$t = 0.5$  $t = 0.6$  $t = 0.7$  $t = 0.8$  $t = 0.9$ Plano $x-z$ Plano $x-y$ Plano $y-z$

FIG. 12.— Comportamiento de las líneas de campo del modelo en el transcurso de un año (continuación). Todas las gráficas están dadas para $M' = 30100nT$, $k' = 0.75$, $\omega = 2\pi/\text{año}$, $\alpha = 23^\circ.5$ y $\beta = 45^\circ$. Las unidades de los ejes de los diferentes planos están dadas en radios terrestres. Las unidades del tiempo t están en años. En los planos $x-z$ y $x-y$ el Sol está situado a la izquierda del origen; en el plano $y-z$ el Sol se encuentra al frente de éste. En el plano $x-z$ se denota con una línea punteada la dirección del momento dipolar.

para el ciclo magnético doble del Sol. Este ciclo magnético consiste de dos principales componentes periódicas, una componente de baja frecuencia (22 años) y una componente de alta frecuencia (2 años). El modelo está basado en la idea de dos dínamos separados en el espacio, la acción del primer dínamo está localizada cerca de la base de la zona convectiva en el Sol y el segundo opera cerca de la parte superior. Según este artículo, la componente radial del campo magnético poloidal solar puede ser expresada como

$$B_r = b_r(\theta) \sin \omega_1 t + \frac{b_r(\theta)}{A} \sin(\omega_2 t + \varphi), \quad (57)$$

donde $b_r(\theta)$ es la amplitud de la componente radial de baja frecuencia del campo magnético; A es la razón entre amplitudes de baja y alta frecuencia; ω_1 es la frecuencia del ciclo solar de 22 años, ω_2 la frecuencia bienal y φ una fase cualquiera, además se toma que $B_\theta \cong 0$. Es decir, se asumirá que la perturbación externa $F(t)$ tiene la forma

$$F(t) = B(\sin \omega_1 t + \frac{1}{A} \sin(\omega_2 t + \varphi))A_h \quad (58)$$

donde A , B son parámetros adicionales a determinar y A_h es la solución homogénea hallada en la sección anterior.

4.2.1. Solución

Para hallar la solución particular de la ecuación inhomogénea se propone una solución de la forma

$$A_p = A_h(r, \theta, \phi, t)\varphi(t), \quad (59)$$

la cual nos dice que la solución particular (A_p) tiene que tener la misma forma que la solución de la ecuación homogénea exceptuando la función $\varphi(t)$ que representa la variación temporal debida a la presencia del Sol.

Cabe mencionar que anteriormente en la resolución de la ecuación homogénea se hizo un trabajo de comparación de los términos de un dipolo con los términos de la solución, lo que significó la selección individual de términos. Siguiendo la misma metodología de trabajo, para la resolución de la ecuación inhomogénea se procederá de la misma manera, es decir, construiremos la solución particular trabajando individualmente con cada término.

Reemplazando $A_p = A_h(r, \theta, \phi, t)\varphi(t)$ en la ecuación (56) se tiene

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} A_h \varphi'' + (2 \frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{\partial A_h}{\partial t} + A_h) \varphi' = -F(t)A_h. \quad (60)$$

Ya que se trabajará individualmente con cada término, A_h representa cada uno de los términos de las diferentes componentes en la solución homogénea. Las soluciones particulares de la ecuación (60) para cada componente son:

$$A_x = M \left(- \frac{e^{k(x-r)} y(kr+1) \cos \alpha}{r^3} \varphi_1(t) + \frac{e^{kx-jr} e^{i(\beta+\omega t)} z(jr+1) \sin \alpha}{r^3} \varphi_2(t) \right) \quad (61)$$

$$A_y = M \left(e^{k(x-r)} \left(\frac{x(kr+1)}{r^3} + \frac{k}{r} \right) \cos \alpha \varphi_1(t) - \frac{e^{kx-jr} e^{i(\beta+\omega t)} z(jr+1) \sin \alpha}{r^3} \varphi_2(t) \right) \quad (62)$$

$$A_z = M \left(\frac{e^{kx-jr} e^{i(\beta+\omega t)} y(jr+1) \sin \alpha}{r^3} \varphi_2(t) - e^{kx-jr} e^{i(\beta+\omega t)} \left(\frac{x(jr+1)}{r^3} + \frac{k}{r} \right) \sin \alpha \varphi_2(t) \right), \quad (63)$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= ce^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t} + \frac{Be^{i\omega_1 t}}{\omega_1(\omega_1 \frac{\varepsilon}{\sigma} - i)} + \frac{Be^{i(\omega_2 t + \psi)}}{A\omega_2(\omega_2 \frac{\varepsilon}{\sigma} - i)} \\ \varphi_2(t) &= ce^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t + 2i\omega t} + \frac{Be^{i\omega_1 t}}{\omega_1((2\omega + \omega_1) \frac{\varepsilon}{\sigma} - i)} \\ &+ \frac{Be^{i(\omega_2 t + \psi)}}{A\omega_2((2\omega + \omega_2) \frac{\varepsilon}{\sigma} - i)}. \end{aligned} \quad (64)$$

Notemos que la solución inhomogénea tiene la misma forma que la solución homogénea excepto por las funciones $\varphi_i(t)$ que representan esa modificación temporal del dipolo.

Como las soluciones particulares están en su forma compleja, se extrae ya sea la parte real o imaginaria de cada término, procediendo de la misma manera que en la obtención de la solución homogénea (ecuaciones (33)):

$$\begin{aligned} A_x &= A_{x1} \text{Re}[\varphi_1(t)] + (\text{Re}[A_{x2}] \text{Im}[\varphi_2(t)] + \text{Im}[A_{x2}] \text{Re}[\varphi_2(t)]) \\ A_y &= A_{y1} \text{Re}[\varphi_1(t)] + (\text{Re}[A_{y2}] \text{Re}[\varphi_2(t)] - \text{Im}[A_{y2}] \text{Im}[\varphi_2(t)]) \\ A_z &= (\text{Re}[A_{z1}] \text{Re}[\varphi_2(t)] - \text{Im}[A_{z1}] \text{Im}[\varphi_2(t)]) + \\ &(\text{Re}[A_{z2}] \text{Im}[\varphi_2(t)] + \text{Im}[A_{z2}] \text{Re}[\varphi_2(t)]) \end{aligned} \quad (65)$$

donde A_{x1} representa el primer término de la componente A_x en la solución homogénea, A_{x2} el segundo término, A_{y1} el primer término de la componente A_y , etc.

La solución general será la superposición de las soluciones homogénea (A_h) e inhomogénea (A_p).

$$\begin{aligned} A_x &= A_{xh} + A_{xp} \\ A_y &= A_{yh} + A_{yp} \\ A_z &= A_{zh} + A_{zp} \end{aligned} \quad (66)$$

Para hallar el campo magnético usamos $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ y nuevamente es necesario hacer el mismo cambio de sistema de referencia hecho para la solución homogénea.

Ahora que se tiene el modelo analítico final para el campo geomagnético, el cual está compuesto por dos soluciones una homogénea A_h que contempla la frecuencia anual debida a la rotación de la Tierra alrededor del Sol y otra inhomogénea A_p que corresponde a la influencia del ciclo magnético solar con las frecuencias de 22 y 2 años, corresponde hacer una validación de éste con los datos observacionales. La siguiente sección es dedicada a este tema.

5. ANÁLISIS DE DATOS

En esta parte del trabajo se busca hacer una validación del modelo teórico contrastando éste con los datos observacionales. Específicamente se hace un ajuste a los datos de diferentes estaciones del mundo, utilizando el método de Levenberg-Marquardt (Press et al. 1997) a través del cual se determinan los parámetros del modelo.

5.1. Datos

— Se toma datos del World Data Center (2008) de diferentes estaciones del mundo.

— Ya que el modelo contempla periodos largos de tiempo se trabaja con medidas representativas de cada día (medias diarias).

TABLA 1
ESTACIONES Y COMPONENTES SELECCIONADAS PARA
EL AJUSTE DEL MODELO.

Estación	Latitud θ	Longitud ξ	Componente
Huancayo (hua)	12°.5S	284°.7E	Z
Chambon la Foret (clf)	48°N	2.3°E	H
Cape Chelyuskin (ccs)	77°.72N	104°.28E	H
Barrow (brw)	71°.32N	203°.38E	H
Guam (gua)	13°.59N	215°.13W	Z
Belsk (bel)	51°.84N	20°.79E	H
Baker Lake (blc)	64°.33N	263°.97E	H

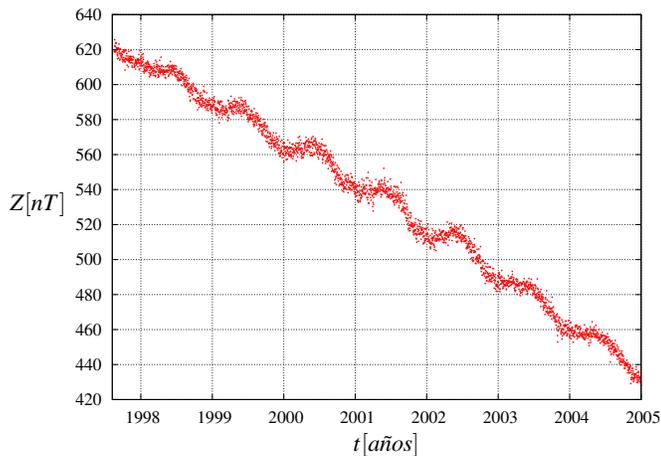


FIG. 13.— Tendencia secular (estación de Huancayo).

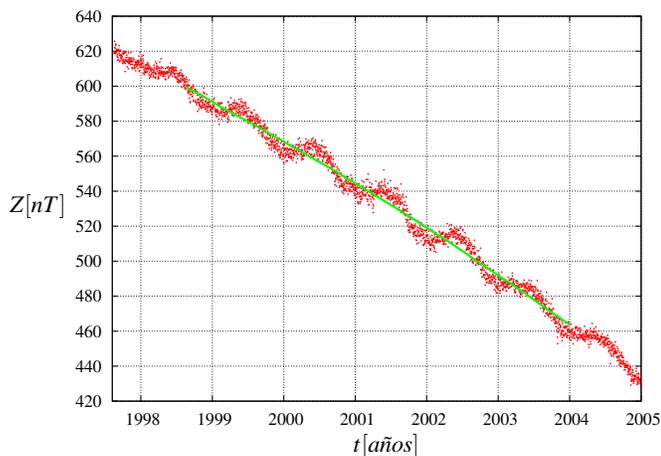


FIG. 14.— Estación Huancayo: componente Z. Los datos en la línea continua representan la tendencia secular.

— A consecuencia de la aproximación de §3.2.1, se trabaja solamente con las componentes H y Z .

— Se seleccionan solamente aquellas componentes que presenten gráficamente una apreciable regularidad en la variación anual.

Las estaciones y componentes seleccionadas para el ajuste del modelo se muestran en la Tabla 1.

5.1.1. Preparación de Datos

Como se mencionó anteriormente, los conjuntos de datos están modulados con diferentes variaciones, una de ellas, y a la vez la más sobresaliente, es la tendencia secular. La variación secular sólo es apreciable en periodos largos de tiempo. La Fig. 13 muestra un ejemplo de esta variación para la componente Z de la estación de Huancayo, donde podemos apreciar la disminución

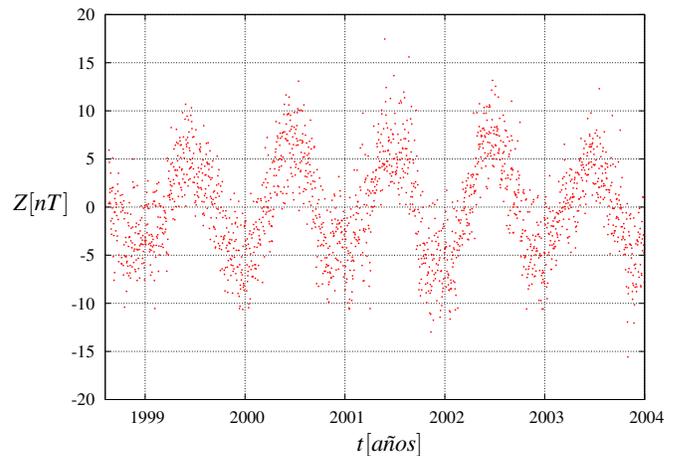


FIG. 15.— Estación Huancayo: componente Z sin tendencia secular.

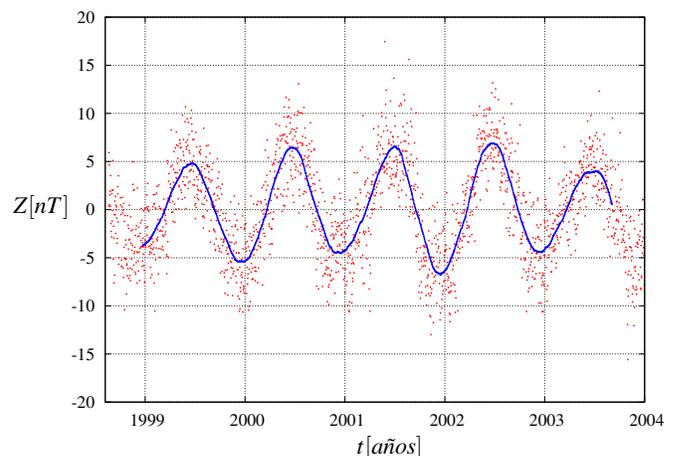


FIG. 16.— Estación de Hunacayo: componente Z, segundo filtrado (datos en línea continua).

de la componente a través del tiempo. Una manera de modelar la tendencia secular es ajustar una recta a este conjunto de datos. Esta recta representaría la variación secular, sobre la cual, como podemos apreciar, existen variaciones periódicas.

Debido a que el modelo no contempla la variación secular, es necesario quitar la misma de los datos. Para ello utilizamos la siguiente ecuación:

$$B = y_i - y(t_i), \quad (67)$$

donde y representa la forma de la tendencia secular, y_i la variaciones alrededor de esta tendencia y B la componente H o Z desafectada de variación secular. Notemos que necesitamos conocer la forma de $y(t)$, para ello utilizamos el método de Savitzky-Golay (Press et al. 1997) para el filtrado de datos. Este método calculan promedios locales a través del ajuste de polinomios ($a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$) en determinados intervalos logrando de este modo reducir el grado de dispersión de los datos. Como la variación secular es apreciable en periodos largos de tiempo, hallaremos la forma de $y(t)$ ajustando rectas ($n = 1$) en intervalos de un año de tal modo que obtengamos la tendencia de la curva a lo largo de varios años. La Fig. 14 muestra un ejemplo para la estación de Huancayo.

En la Fig. 14, los datos dispersos representan los datos sin tratar y los datos en línea continua la tendencia secular obtenida a través del filtro Savitzky-Golay. Aplicando la ecuación (67) obtenemos datos de la componente sin tendencia secular como se muestra en la Fig. 15.

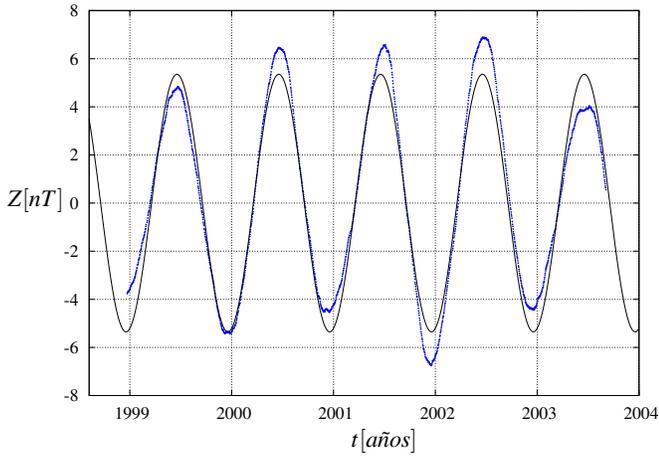


FIG. 17.— Huancayo [Z]. Los parámetros del modelo son: $M' = 27841.1$, $k' = 2 \times 10^{-4}$, $\Phi = 4.8$, $m = 7.2 \times 10^{22} Am^2$. Los valores están dados para $r' = r_T$, $\omega = 2\pi/\text{año}$ y $\Theta = 23^\circ.5$.

Notemos que en la Fig. 15 existe una dispersión bastante apreciable. Esta dispersión podría ser una pequeña dificultad en el ajuste, debido a que el programa de ajuste necesita como entrada parámetros iniciales, que uno mismo estima gráficamente cuidando que la curva se aproxime lo mejor posible a los datos (luego el programa realiza una estimación más precisa de los parámetros). Esto significa que los datos deben tener una apreciable regularidad de tal modo que sea más cómodo estimar los parámetros, no sólo para uno, sino también para el programa. Para salvar esta dificultad, se hará un segundo filtrado. Este proceso mostrará de mejor manera la forma de la curva en el tiempo.

En el segundo filtrado se utiliza el mismo método del primero pero esta vez se toma promedios de 120 días y se ajusta polinomios de segundo grado ($n = 2$). El resultado de este último procedimiento se muestra en la Fig. 16.

Podemos apreciar en la Fig. 16 que el segundo filtrado (datos en línea continua) muestra mejor la tendencia de la curva, lo cual hace que los datos filtrados sean más adecuados para el ajuste.

La preparación de datos es hecha para las siete estaciones de la Tabla 1.

5.2. Ajuste con la Solución Homogénea

El ajuste se realiza con los datos sin tendencia secular filtrados. Se toman como parámetros a determinar a M' , k' y Φ , mientras que ξ , ω , r' , θ y Θ son constantes que toman diferentes valores dependiendo de la estación.

La descripción de estas constantes es la siguiente:

$$\begin{aligned} \xi &= \text{Longitud} \\ \omega &= 2\pi/\text{año} \\ r' &= r_T \quad (\text{un radio terrestre}) \\ \theta &= \text{Latitud} \\ \Theta &= 23^\circ.5 \quad (\text{inclinación del dipolo}) \end{aligned} \quad (68)$$

5.2.1. Técnica

— Se estiman los parámetros M' , k' y Φ visualmente de tal modo que estos ajusten la curva lo mejor posible a los datos.

— Utilizando un programa se ajusta solamente un parámetro manteniendo fijos los dos restantes.

— Se repite este último procedimiento para cada parámetro, de este modo tendremos una estimación más precisa de los parámetros.

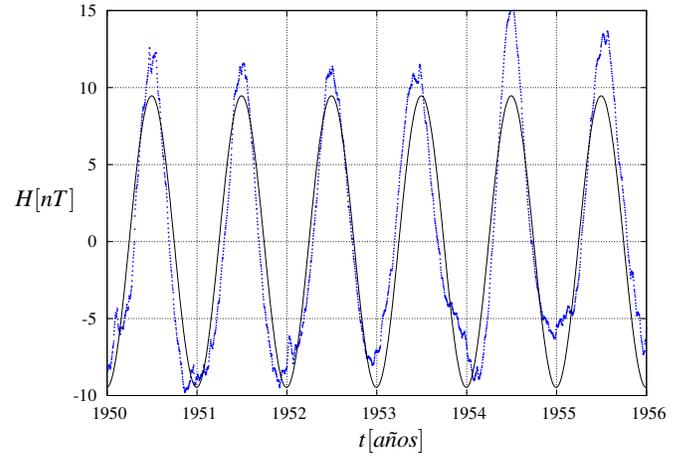


FIG. 18.— Chambon la Foret [H]. Los parámetros del modelo son: $M' = 30261.7$, $k' = 3 \times 10^{-4}$, $\Phi = 6.3$, $m = 7.8 \times 10^{22} Am^2$. Los valores están dados para $r' = r_T$, $\omega = 2\pi/\text{año}$ y $\Theta = 23^\circ.5$.

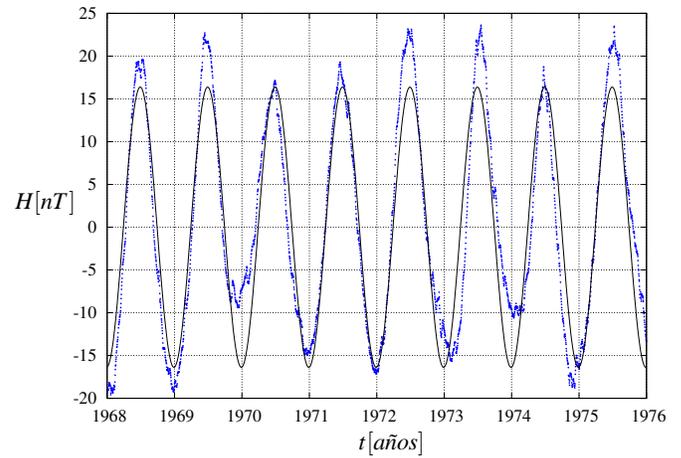


FIG. 19.— Cape Chelyuskin [H]. Los parámetros del modelo son: $M' = 30434.8$, $k' = 6 \times 10^{-4}$, $\Phi = 4.5$, $m = 7.9 \times 10^{22} Am^2$. Los valores están dados para $r' = r_T$, $\omega = 2\pi/\text{año}$ y $\Theta = 23^\circ.5$.

— Finalmente, utilizando como parámetros iniciales los valores estimados en los pasos 2 y 3 se ajustan los tres parámetros al mismo tiempo.

En el ajuste, en todos los casos se asume un error para la ordenada de

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N [y_i - y(x_i)]^2}{N}}, \quad (69)$$

donde los y_i son los datos sin tendencia secular no filtrados (en la Fig. 16, datos dispersos) y los $y(x_i)$ los datos sin tendencia secular filtrados (en la Fig. 16, datos en línea continua).

Respecto al tiempo de cómputo requerido en el cálculo de cada parámetro, éste fue de aproximadamente 1 – 3s, dependiendo de cuán precisa fue la estimación visual inicial. El equipo utilizado contaba con un procesador de 1.69GHz y 256Mb de RAM.

En las gráficas de las Figs. 17–23 se ilustran los ajustes logrados para siete estaciones.

La Tabla 2 muestra un resumen de los parámetros obtenidos, además del valor del momento dipolar magnético de la tierra estimado con la ecuación (53).

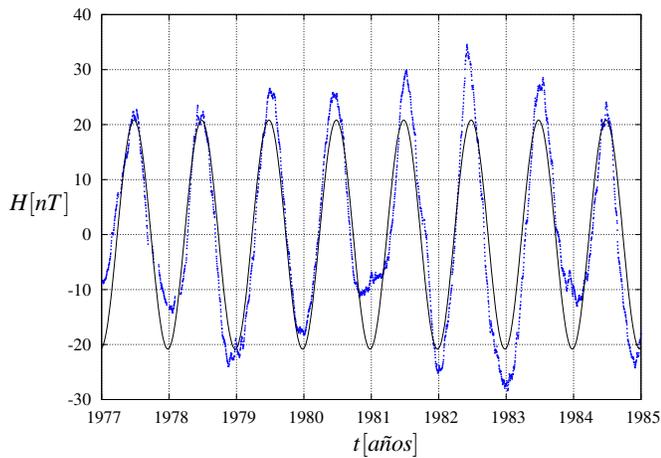


FIG. 20.— Barrow $[H]$. Los parámetros del modelo son: $M' = 30830.7$, $k' = 7 \times 10^{-4}$, $\Phi = 2.9$, $m = 8.0 \times 10^{22} \text{Am}^2$. Los valores están dados para $r' = r_T$, $\omega = 2\pi/\text{año}$ y $\Theta = 23^\circ.5$.

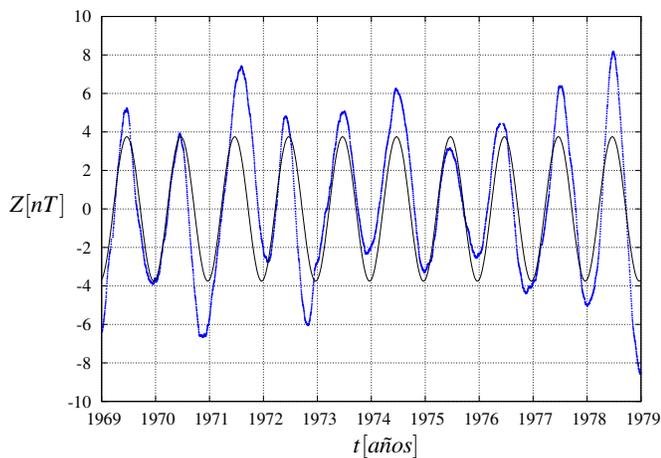


FIG. 21.— Guam $[Z]$. Los parámetros del modelo son: $M' = 28549.8$, $k' = 1 \times 10^{-4}$, $\Phi = 4.2$, $m = 7.4 \times 10^{22} \text{Am}^2$. Los valores están dados para $r' = r_T$, $\omega = 2\pi/\text{año}$ y $\Theta = 23^\circ.5$.

5.3. Ajuste con la Solución Inhomogénea

Anteriormente se mencionó que la solución inhomogénea corresponde a la modificación del campo geomagnético alrededor de la oscilación natural del sistema (en nuestro caso oscilación anual), por lo que para poder hacer el ajuste de esta solución necesitamos que los datos estén desafectados de la variación anual. Esto se logra nuevamente con la ayuda de la ecuación (67), donde en este caso $y(t)$ representa la forma de la variación anual (solución homogénea) y y_i las fluctuaciones alrededor de esta variación. La gráfica de la Fig. 24 muestra un ejemplo para la estación de Chambon la Foret. Los dos conjuntos de datos (púrpura y rojo), son resultado de la aplicación de la ecuación (67). Estos datos están desafectados de variación anual y secular.

Sobre estos datos se debe hacer el ajuste de la solución inhomogénea. A diferencia de las gráficas de las Figs. 17—23, esta no presenta una marcada tendencia que pueda decirnos sobre la posibilidad de ajuste de alguna curva. Para esclarecer esta duda haremos un pequeño análisis de la dispersión de los datos.

En el hipotético caso de un ajuste de la solución inhomogénea a los datos de la Fig. 24, uno puede aproximar como error para la ordenada a la dispersión σ —ecuación (69)— con respecto a la media, que en el caso de la estación de Chambon la Foret, su valor es de aproximadamente 11 nT (Tabla 2). Esto significa que un punto de la curva ajustada y_i puede estar en el rango de

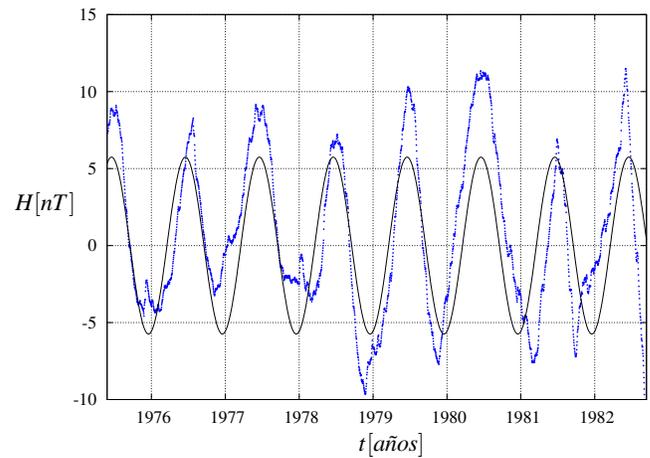


FIG. 22.— Belsk $[H]$. Los parámetros del modelo son: $M' = 31677.5$, $k' = 2 \times 10^{-4}$, $\Phi = 6.2$, $m = 8.2 \times 10^{22} \text{Am}^2$. Los valores están dados para $r' = r_T$, $\omega = 2\pi/\text{año}$ y $\Theta = 23^\circ.5$.

$y_i(t) \pm 11 \text{ nT}$ como máximo. Por otro lado el campo magnético proveniente del Sol (campo magnético interplanetario) tiene un valor promedio de 5 nT , aproximadamente, lo que significa que y_i podría variar de 0 a 5 nT (ya que es una oscilación con frecuencias ω_1 y ω_2), entonces, en el mejor de los casos, el error para la ordenada sería de

$$E\% \cong \frac{11}{5} = 220\%. \quad (70)$$

Esto nos dice que no existe la certeza de decir que la curva a ajustar representará adecuadamente las variaciones geomagnéticas debidas a la influencia externa del campo magnético solar, razón suficiente para desistir en el ajuste correspondiente de la solución inhomogénea.

Cabe mencionar que éste último análisis fue realizado para todas las componentes seleccionadas, lo cual nos llevó a la misma conclusión.

En este punto tal vez el lector se pregunte si valió la pena elaborar el modelo para la ecuación inhomogénea. La respuesta es si y una explicación razonable del por qué es válido el modelo se da en la parte final de la siguiente sección que resume las conclusiones acerca del trabajo.

6. CONCLUSIONES Y DISCUSIONES

En la primera parte del trabajo se elabora un modelo dinámico para las componentes geomagnéticas H y Z , siendo la razón principal de la variación temporal el viento solar y la traslación de la Tierra alrededor del Sol. Ésto se logra a partir de la resolución de la ecuación de difusión homogénea de la Magnetohidrodinámica, la cual es colocada en función del potencial magnético \vec{A} . A fin de contrastar la solución (modelo) con los datos observacionales (dado que el sistema de referencia de la solución homogénea es aquél cuyo eje z es perpendicular al plano de la órbita terrestre), se hace un cambio del sistema de referencia de esta manera determinar las componentes geomagnéticas H y Z como función de la posición y del tiempo. Por cuestiones de simplicidad, en la resolución y en la forma del modelo se procede a realizar aproximaciones. Primero, en la solución final de la ecuación diferencial, se asumen dados valores para los parámetros v y η (siendo v la velocidad del viento solar y η la viscosidad magnética del mismo) o bien para $k(v, \eta)$ (eigenvalor del problema) en cada punto del espacio lo cual significó salvar la necesidad de precisar las funciones $\vec{v}(\vec{r})$ y $\eta(\vec{r})$ logrando de esta manera una resolución más simple. Segundo, en las compo-

TABLA 2
PARÁMETROS OBTENIDOS PARA SIETE ESTACIONES DEL MUNDO. LOS VALORES ESTÁN DADOS PARA $r' = r_T$, $\omega = 2\pi/\text{año}$ Y $\Theta = 23^\circ.5$.

Estación	M' [nT]	k'	Φ	σ	χ^2	$m \times 10^{22}$ [Am ²]
hua	[Z] 27841.1	2×10^{-4}	4.8	3.0	126.2	7.2
clf	[H] 30261.7	3×10^{-4}	6.3	10.9	118.0	7.8
ccs	[H] 30434.8	6×10^{-4}	4.5	26.1	79.8	7.9
brw	[H] 30830.7	7×10^{-4}	2.9	35.4	82.4	8.0
gua	[Z] 28549.8	1×10^{-4}	4.2	3.0	2663.3	7.4
bel	[H] 31677.5	2×10^{-4}	6.2	15.0	129.8	8.2
blc	[H] 30661.3	7×10^{-4}	4.4	20.2	137.3	7.9

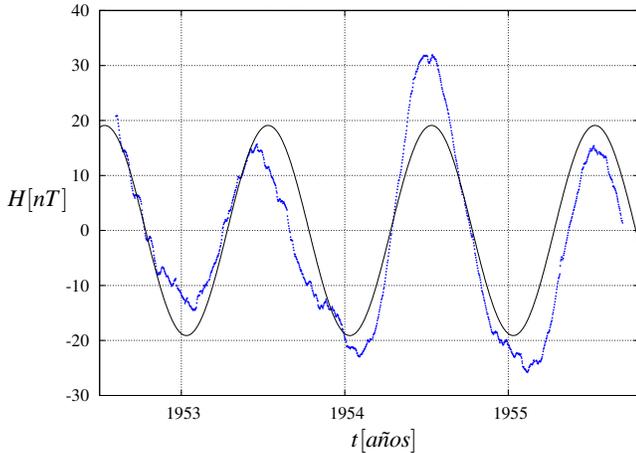


FIG. 23.— Baker Lake [H]. Los parámetros del modelo son: $M' = 30661.3$, $k' = 7 \times 10^{-4}$, $\Phi = 4.4$, $m = 7.9 \times 10^{22} \text{Am}^2$. Los valores están dados para $r' = r_T$, $\omega = 2\pi/\text{año}$ y $\Theta = 23^\circ.5$.

mentos H y Z se considera que el eje magnético de la Tierra coincide con el eje de rotación a fin de obtener una forma más simple para el modelo. Por último, producto de contrastar el modelo con los datos observacionales, se advierte que la modificación de los valores de ciertos parámetros no repercute de manera notable en el modelo.

Con el fin de apreciar mejor el comportamiento del modelo en el espacio-tiempo, se esquematizan las líneas de campo magnético para diferentes valores de los parámetros k' (parámetro espacial k normalizado) y t (tiempo), y en los diferentes planos. Según estos, el campo geomagnético es modificado por la presencia del viento solar comprimiendo las líneas de campo en el hemisferio que confronta directamente con el Sol y a la vez estira las líneas de campo en el hemisferio que está en oposición al mismo. A medida que la Tierra da una vuelta completa alrededor del Sol, el aumento y descenso de la presión que ejerce el campo geomagnético sobre el viento solar es muy evidente.

El modelo es comparado con magnetogramas de siete estaciones del mundo encontrando un ajuste razonable. Según el modelo, las variaciones anuales que presenta el campo geomagnético son debidas específicamente a la presión magnética que ejerce el viento solar sobre el campo durante el transcurso de un año. Esta presión magnética, según un observador sobre la tierra, varía en el transcurso de las diferentes estaciones del año. Un observatorio presentará un máximo en la componente geomagnética cuando éste confronte directamente al viento solar ya que la presión magnética es máxima en ese caso. Por otro lado, el mínimo se dará cuando el observatorio esté en el hemisferio que está en oposición al Sol.

Se obtuvieron en el ajuste tres parámetros: M' , k' y Φ . El parámetro k' representa la modificación de las líneas del campo

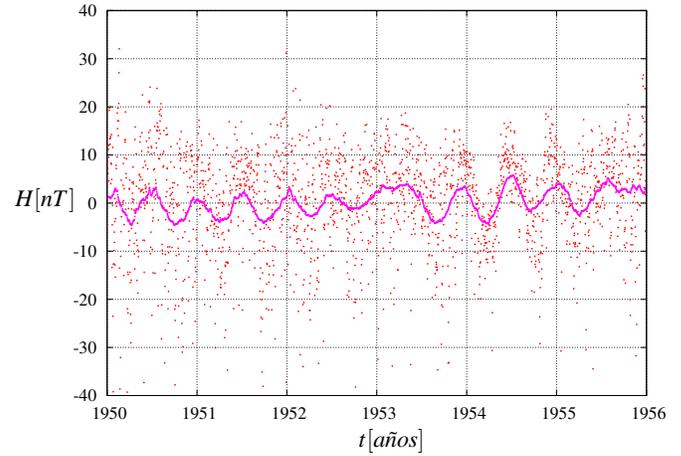


FIG. 24.— Estación Chambon la Foret, componente H . Los datos están desafectados de variación anual y secular. En el primer caso (datos dispersos), se ha tomado como valores para y_i los datos sin tendencia secular no filtrados. En el segundo caso (datos en línea continua), se ha tomado para y_i los datos sin tendencia secular filtrados. En ambos casos, $y(t)$ representa la solución homogénea.

magnético principal y por ende la amplitud de las oscilación alrededor del campo principal (dipolo), conteniendo ésta la información del viento solar. Según la Tabla 2, los valores de k' son del orden de 10^{-4} en todos los casos. Ésto significa que existe poca influencia del viento solar sobre el observatorio respectivo, debido a la pequeñez del valor, lo cual es razonablemente aceptable ya que el ajuste en todos los casos fue realizado sobre la superficie terrestre, en donde se sabe que el campo es predominantemente dipolar, por lo que la forma de las líneas de campo en esta región son de ese tipo.

El límite de la magnetosfera se encuentra a una distancia promedio de diez radios terrestres ($10r_T$) del centro de la Tierra. Es natural pensar que para los parámetros obtenidos ($k' \sim 10^{-4}$) uno esperaría una deformación de las líneas de campo parecida a la magnetosfera real, este no es el caso, ya que el parámetro k' es sólo una de las componentes de un espectro de eigenvalores, por lo que éste toma diferentes valores principales para diferentes radios debido a la diferencia que hay en la deformación de líneas de campo en los diferentes radios. Ésto significa, a la vez, que existe una limitante en la extrapolación de las componentes H y Z para valores relativamente lejanos a un radio terrestre. Todo esto no significa que el modelo no sea adecuado para valores cercanos a diez radios terrestres ($10r_T$). La solución está en ajustar el modelo a datos medidos en el espacio de la magnetosfera. Si este fuera el caso se esperaría que el modelo represente también de buena forma las fluctuaciones del campo en esta región, como lo hace en las regiones cercanas a $1r_T$.

El parámetro M' fue utilizado para determinar el momento dipolar magnético de la Tierra (m). Según la Tabla 2, los valores obtenidos para m se aproximan bastante al valor teórico $m = 8.02 \times 10^{22} \text{Am}^2$ (Zombeck 2007). Esto significa que el modelo es adecuado para determinar el momento dipolar para algún intervalo de tiempo, lo cual da fe de la validez del modelo. La interpretación física del parámetro M' está relacionada con el orden de magnitud del campo geomagnético, éste está encargado de fijar el grado de intensidad del campo sobre el cual existe variación, dependiendo de la posición en la que uno desea conocer el campo. En cuanto a la fase Φ , ésta representa solamente la elección del origen del tiempo.

En la segunda parte del trabajo se resuelve la ecuación de difusión inhomogénea la cual puede representar las variaciones periódicas del campo geomagnético con origen en el ciclo magnético solar (con periodos, uno de 2 años y otro de 22 años).

El agente perturbador es introducido en la ecuación de difusión inhomogénea utilizando el criterio del oscilador armónico simple en cuanto a las variaciones de un sistema sometido a la acción de un campo exterior variable. No pudo realizarse el ajuste de la solución inhomogénea obtenida debido al hecho de que el campo geomagnético es modificado por diferentes tipos de factores ya sea de carácter interno o externo (geodínamo interno, tormentas magnéticas, ionosfera, etc.). Todo este conjunto de factores hacen que el campo magnético, medido por las estaciones, presente una dispersión bastante grande en torno al campo principal comparada con la influencia externa del ciclo solar magnético (campo magnético interplanetario), cuya amplitud máxima promedio en la órbita terrestre es de $5nT$, aproximadamente, lo cual nos lleva a la conclusión de que la posible curva ajustada no representaría adecuadamente las variaciones del campo geomagnético debida a la influencia magnética solar.

A pesar de que el modelo inhomogéneo no fue verificado con los datos experimentales, éste sigue siendo una propuesta razonablemente aceptable que podría describir el comportamiento del campo geomagnético debido a la influencia externa con origen en la periodicidad intrínseca del campo magnético solar. La dificultad en el ajuste como se mencionó anteriormente está en la apreciable dispersión de los datos, por lo que para salvar este problema es necesario hacer un tratamiento a los datos de tal

modo que estos queden desafectados de variaciones ajenas al modelo. Una segunda opción es ajustar el modelo a datos medidos en el espacio de la magnetosfera donde estos presentarían poca dispersión (ya que en esta región existen menos factores que influyen en el campo geomagnético). Ello implicaría adquirir una base de datos satelital la cual está disponible en el World Data Center (2008), pero a la vez implicaría realizar un tratamiento adecuado a estos de tal manera que estén dispuestos en el sistema de referencia del presente modelo lo cual constituye una tarea muy complicada ya que los satélites en general sólo miden la magnitud del campo y además lo hacen en diferentes órbitas. Otra opción más radical es replantear las ecuaciones diferenciales introduciendo términos de ruido en los coeficientes de éstas. Estos términos de ruido contemplarían desde un principio aquellos factores influyentes del campo geomagnético cuyo comportamiento preciso es desconocido. Lo único que se conocería de los factores influyentes es la distribución de probabilidad. De esta manera el modelo sería más realista convirtiéndose en una ecuación diferencial parcial estocástica. Entonces queda como sugerencia, para posibles estudios posteriores la realización del tratamiento de los datos satelitales o el replanteamiento de ecuaciones a fin de que sirvan como objeto de aplicación o verificación del presente modelo no sólo en su parte inhomogénea sino también en su parte homogénea.

REFERENCIAS

- Benevolenskaya, E. E. 1998, A Model of Double Magnetic Cycle of the Sun, Tech. rep., Pulkovo Astronomical Observatory, W.W. Hansen Experimental Physics Laboratory, Petersburg 196140 Russia
- Bravo, S. 1999, El Campo Magnético Interplanetario, Tech. rep., Departamento de Física Espacial, Instituto de Geofísica, UNAM
- Campbell, W. H. 2003, Introduction to Geomagnetic Fields, 2nd edn. (Press Syndicate of the University of Cambridge)
- Cillis, A. & Sciutto, S. J. 2006, Geomagnetic Field and Air Shower Simulations, Tech. rep., Departamento de Física, Universidad Nacional de La Plata
- Cravens, T. E. 1997, Physics of Solar System Plasmas (University of Cambridge)
- Goldstein, H., Poole, C., & Safko, J. 2000, Classical Mechanics, 3rd edn. (Addison Wesley)
- Jackson, J. D. 1999, Classical Electrodynamics, 3rd edn. (John Wiley & Sons, Inc.)
- Jankowski, J. & Sucksdorff, C. 1996, Guide for Magnetic Measurements and Observatory Practice (International Association of Geomagnetism and Aeronomy)
- Kivelson, M. G. & Russell, C. T., eds. 1995, Introduction to Space Physics (40 West 20th Street, New York: University of Cambridge)
- Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. 1960, Mechanics, Vol. 1 (Pergamon Press)
- Luhmann, J. G. & Friesen, L. M. 1979, Journal of Geophysical Research, 84, 4405
- Mead, G. D. 1964, Journal of Geophysical Research, 69, 1181
- Mendoza, M. & Morales, J. 2004, Analysis of the Interaction of the Solar Wind with the Terrestrial Magnetosphere, Tech. rep., Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Ciudad Universitaria, Bogota, D.C., Colombia
- Parks, G. K. 2004, Physics of Space Plasmas An Introduction, 2nd edn. (Wesview Press)
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 1997, Numerical Recipes in Fortran 77, 2nd edn., Vol. 1 (Press Syndicate of the University of Cambridge)
- Vilca Salinas, R. 2001, Master's thesis, Carrera de Física, Universidad Mayor de San Andrés, La Paz, Bolivia
- World Data Center. 2008, <http://spidr.ngdc.noaa.gov/spidr>
- Zombeck, M. V. 2007, Handbook of Space Astronomy and Astrophysics, 3rd edn. (Cambridge University Press)