REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA **18**, 1–6, 2011
ISSN 1562–3823. INDEXADA EN: SCIELO, LATINDEX, PERIÓDICA

AUTOSIMILARIDADES EN EL ESPACIO DE PARÁMETROS DEL CIRCUITO DE CHUA CON NO-LINEALIDADES DISCRETAS Y CONTINUAS
SELF-SIMILARITIES IN THE PARAMETER SPACE OF CHUA'S CIRCUIT WITH DISCRETE AND CONTINUOUS NONLINEARITIES

G. M. RAMÍREZ ÁVILA[†] & J. A. C. GALLAS[‡]
[†] Intituto de Investigaciones Físicas
Universidad Mayor de San Andrés
AG Nichtlineare Dynamik
Institut fur Physik
Humboldt Universitat zu Berlin
[‡] Instituto de Física
Universidade Federal do Rio Grane do Sul
Departamento de Física
Universidade Federal de Paraiba
(*Recibido agosto de 2010; aceptado enero de 2011*)

RESUMEN

Se muestran autosimilaridades en el espacio de parámetros del circuito de Chua tanto con una no-linealidad discontinua como con una no-linealidad cúbica. Mediante un análisis sencillo de estas estructuras, se calcula de manera aproximada sus dimensiones fractales.

Descriptores: dinámica no-lineal y caos — fractales

Código(s) PACS: 05.45._a, 05.45.Df

ABSTRACT

We show self-similarities onto the phase diagram of the Chua's circuit involving both piecewise linear and cubic nonlinearities. By means a simple analysis of these structures we have estimated their fractal dimension.

Subject headings: nonlineal dynamics and chaos — fractals

1. INTRODUCCIÓN

El circuito de Chua, a pesar de su simplicidad, permite observar muchos comportamientos dinámicos, tales como periodicidades (Mira 1997), ruta al caos por desdoblamiento de período, por intermitencia o por colapso toroidal (L. O. Chua & Zhong 1993a), así como diferentes tipos de atractores extraños (L. O. Chua & Zhong 1993b; Deregel 1993; Tsuneda 2005; E. Bilotta & Stranges 2007a,b) y fenómenos tales como hipercaos (T. Matsumoto & Kobayashi 1986; K. Thamilmaran & Venkatesan 2004).

Por otra parte, los intentos para la caracterización de comportamientos periódicos o caóticos en el circuito de Chua se realizaron mediante diagramas de bifurcación con la variación de un parámetro (Mira 1997; L. O. Chua & Zhong 1993a; A. I. Khibnik & Chua 1993) o con la variación de dos parámetros (bifurcación de codimensión 2) (L. O. Chua & Matsumoto 1986; T. Matsumoto & Tokunaga 1987; Kennedy 1993; M. S. Baptista & Rosa 2003; Avila & Gallas 2008; Albuquerque & Rech 2009; Huang 1996) en los que el cálculo de exponentes de Lyapunov era esencial. Inicialmente, los estudios del circuito de Chua se hicieron tomando una característica lineal por partes (Chua & Lin 1990; Kahlert & Chua 1992); posteriormente, también se desarrolló una versión con una no linealidad cúbica (Tsuneda 2005; Albuquerque & Rech 2009; Zhong 1994). Ciertos tipos de autosimilaridades fueron descritas para el circuito de Chua (L. O. Chua & Yang 1986; L. Pivka & Chua 1994; H. A. Albuquerque & Rech 2008), sin embargo, en ninguno de estos trabajos se intentó el cálculo de la dimensión fractal correspondiente a las mismas.

El presente trabajo pretende estudiar las autosimilaridades que se observan en el espacio de parámetros intentando un cálculo sencillo de la dimensión fractal basado en el hecho de una cuantificación de estas estructuras; lo anterior se hace considerando los dos tipos de no linealidades con el fin de comparar las mismas.

El artículo está organizado de la siguiente manera: En la Sección 2 se presentan las ecuaciones

[†]Email: mravila@fiumsa.edu.bo
Website: http://www.fiumsa.edu.bo/docentes/mramirez/
[‡]Email: jgallas@if.ufrgs.br
Website: http://www.if.ufrgs.br/ gallas/

del circuito de Chua tanto para la característica lineal por partes como para la cúbica y se plantea la comparación de las mismas. En la Sección 3 se muestran los resultados del análisis en el espacio de parámetros y se explica el cálculo de la dimensión fractal para un tipo de estructura usando tanto la característica lineal por partes como la continua. Finalmente, en la Sección 4 se dan las conclusiones y perspectivas de la investigación realizada.

2. DOS NO LINEALIDADES PARA EL CIRCUITO DE CHUA

Como se señaló en la introducción, la primera descripción del circuito de Chua se la hizo en términos de una característica lineal por partes, la misma que está descrita en detalle en: T. Matsumoto & Kobayashi (1986); L. O. Chua & Matsumoto (1986); Avila & Gallas (2008); Conde & Avila (2007). Los elementos principales de este circuito son una resistencia R, dos condensadores C_1 y C_2, una bobina L y la resistencia interna r_0 asociada a la misma, todos estos son los elementos lineales, en tanto que el diodo de Chua cuya característica está dada por la función f es el elemento no lineal. Las ecuaciones adimensionales para el circuito de Chua se pueden escribir en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \alpha\left(y - x - f(x)\right) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= x - y + z \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= -\beta y - \gamma z, \end{aligned} \tag{1}$$

donde α, β y γ, constituyen los parámetros de control, los mismos que están relacionados con los componentes del circuito en la forma:

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1}, \beta = \frac{R^2 C_2}{L}, \gamma = \frac{r_0 R C_2}{L}. \tag{2}$$

De (1), se ve que el sistema de tres ecuaciones diferenciales sería lineal sino fuese por la función *f(x)* que como indicamos anteriormente caracteriza al diodo de Chua (elemento no lineal). Para la característica lineal por partes, se tiene:

$$f(x) = bx + \frac{1}{2}(a-b)\left(|x+1| - |x-1|\right)$$

que se puede expresar como:

$$f(x) = \begin{cases} bx - a + b & \text{si} \quad x \le -1 \\ ax & \text{si} \quad |x| \le 1 \\ bx + a - b & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases} \tag{3}$$

Donde, *a* y *b* representan las pendientes negativas de la curva característica de la Figura 1 (trazo continuo); en tanto que para la no linealidad cúbica se tiene: $f_{cubico}(x) = g(x) = \widehat{a}x^3 + \widehat{b}x$. La aproximación de la función lineal por partes *f(x)* a la función cúbica *g(x)* se hace mediante el método de mínimos cuadrados, donde se define el error cuadrático entre *f(x)* y *g(x)* como:

$$S = \int_{-d}^{d} |f(x) - g(x)|^2 \, x. \tag{4}$$

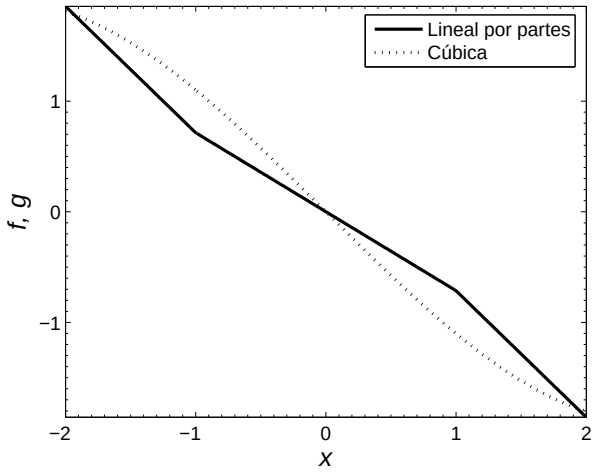

FIG. 1.— Curvas características equivalentes para el oscilador de Chua con no linealidades lineal por partes (trazo continuo) y cúbica (trazo punteado) para valores de parámetros: $a = -8/7$, $b = -5/7$ y $d = 2.0$, lo que da $\widehat{a} = 0.0659$ y $\widehat{b} = -1.1671$. Se nota que las concavidades de las curvas características son opuestas, situación que se presenta cuando se toman valores de d relativamente pequeños.

Aquí se considera el intervalo de aproximación $[-d, d]$ y bajo las condiciones ${}^{\partial S}/_{\partial a} = 0$ y ${}^{\partial S}/_{\partial b} = 0$, se encuentra la dependencia de los coeficientes de *g(x)* con los de *f(x)* en la forma:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= -\frac{35(d^2-1)^2}{16d^7}(a-b)\ , \\ \hat{b} &= \frac{45d^4 - 50d^2 + 21}{16d^5}(a-b) + b. \end{aligned} \tag{5}$$

En la Figura 1, se muestra la aproximación de las características lineal por partes y cúbica, considerando el intervalo de aproximación$[-2, 2]$.

3. ANÁLISIS DE AUTOSIMILARIDADES EN EL ESPACIO DE PARÁMETROS

Desde los primeros trabajos dedicados al análisis del espacio de parámetros, en sistemas discretos, se descubrió que en ellos aparecían autosimilaridades (Gallas 1993, 1994). Posteriormente, se observaron también autosimilaridades en sistemas continuos (C. Bonatto & Gallas 2005; Gallas 2010) y en particular para el sistema que es objeto del presente trabajo, se reportaron autosimilaridades (Avila & Gallas 2008; H. A. Albuquerque & Rech 2008) cuando la curva característica del diodo de Chua es lineal por partes. Para nuestro análisis, se utilizan los valores señalados en la Figura1. El método de integración es el de Runge-Kutta de cuarto orden con un paso de tiempo fijado en h = 10^{-3}, un transiente de 7x10^4 y un tiempo total de integración de 1.4x10^6.

Para estudiar las autosimilaridades en el circuito de Chua considerando tanto la característica lineal por partes como la cúbica, se analizó el plano vs. (resolución de 1200x1200 pixeles en todos los casos) manteniendo fijo el valor de $\beta = 1000.0$. y en regiones en las cuales es posible observar los de-

nominados "camarones"[1], tal como se muestra en la Figura 2 para ambas no linealidades. En esta figura, se pueden ver diversos detalles estructurales que se repiten indefinidamente si se cambia la escala con la cual se observan dichos detalles. Por ejemplo, se nota una secuencia de casi rectángulos formados por las "patas" de un camarón principal y dos secundarios como se explicará más adelante. Identificamos las coordenadas de sus vértices en el espacio de parámetros a las cuales les asociamos las letras A_i, B_i, C_i y D_i (i = 1, 2, 3, 4); en particular, el punto D_i está asociado al comienzo de la "pata" superior del "camarón". A partir de las coordenadas de los vértices A_i, B_i y C_i de los casi rectángulos, se pueden calcular las longitudes de los segmentos $\overline{A_iC_i}$, con lo que es posible referirse a los triángulos rectángulos esféricos $\triangle\widehat{A_iB_iC_i}$. Luego, con el fin de cuantificar las autosimilaridades, se pueden considerar los triángulos esféricos como si fuesen triángulos planos y así calcular fácilmente el área de los mismos y de otros similares que van apareciendo a medida que se magnifica la figura del espacio de parámetros.

De la Figura 2, se puede observar que el espacio de parámetros para ambas características no lineales del circuito de Chua presentan una gran similitud que nos lleva a referirnos a un isomorfismo de los diagramas de fase tal como se muestra en detalle en Avila & Gallas (en preparación). Magnificando la región de interés determinada por el rectángulo y en la que se encuentra una otra estructura similar, se vuelven a especificar las coordenadas de los vértices A_2, B_2, C_2 y D_2 en el nuevo rectángulo, tal como se muestra en las Figuras 2c y 2d. Nuevamente, después de una magnificación de las regiones marcadas, se obtienen rectángulos donde es posible identificar las coordenadas de os vértices A_3, B_3, C_3 y D_3 (Figuras 2e y 2f). En base a las coordenadas de los vértices A_i, B_i, C_i y D_i encontradas en cada figura, se puede construir una serie de casi rectángulos a partir de los lados $\overline{A_iB_i}$, $\overline{B_iC_i}$, $\overline{C_iD_i}$ y $\overline{D_iA_i}$, Además, se puede calcular el área de cada uno de los triángulos $\triangle\widehat{A_iB_iC_i}$ mediante:

$$S_i = \frac{(\overline{B_iC_i})(\overline{A_iB_i})}{2}.$$

Los resultados se muestran en la Tabla 1. Con los datos de esta tabla, se puede en primer lugar trazar las siluetas de las estructuras autosimilares consideradas en las figuras precedentes tal como se muestra en la Figura 3.

Es interesante notar que las estructuras autosimilares nos llevan a confirmar la idea de isomorfismo mencionada anteriormente y tratada con mayor detalle en Avila & Gallas (en preparación). Por otra parte, con estos mismos datos, es posible estimar la dimensión fractal D de estas estructuras autosimilares para ambas no linealidades. Para este cálculo, partimos del concepto básico de dimensión de similaridad que implica una ley de potencias para relacionar las estructuras que nos dan la idea de autosimilaridad (Tel & Gruiz 2006; Nicolis 1995; Schroeder 1992).

Usualmente, la dimensión fractal se define como:

$$D = \frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}, \tag{6}$$

donde N es el número de réplicas similares consideradas y r es el factor de reducción. Para el cálculo de r partimos de las estructuras autosimilares mostradas en la Figura 3 y para completar nuestro análisis de autosimilaridad nos valemos nuevamente de la Figura 2b la que se muestra en la Figura 4 en blanco ($\lambda > 0$) y negro ($\lambda \leq 0$), siendo el mayor exponente de Lyapunov. El análisis de la Figura 4 es esencial para la estimación de la dimensión fractal pues aquí se identifican las estructuras autosimilares, sus N réplicas y se da la base para el cálculo de r. Se identifican al "camarón principal" y a dos "camarones secundarios"; con las "patas" del camarón principal y una de las "patas" de cada uno de los camarones secundarios se forma una estructura rectangular en cuyo interior habrán N = 9 réplicas y un nuevo "camarón principal" con cuyas "patas" se forma una nueva estructura autosimilar que será la base para la observación de nuevas estructuras autosimilares.. El proceso se repite hasta que la resolución gráfica así lo permita. En este trabajo, hacemos el estudio de las propiedades métricas considerando sólo tres de los infinitos casi rectángulos de la serie. Para el cálculo de r, consideramos los lados $\overline{A_iB_i}$ y $\overline{B_iC_i}$ que son los mejor definidos en las estructuras rectangulares. Con cada uno de estos lados podemos encontrar r mediante una regresión exponencial; sin embargo, para tomar en cuenta simultáneamente estos lados, podemos hallar r comparando las áreas de los triángulos rectángulos $\triangle\widehat{A_iB_iC_i}$ en la forma:

$$r_n^2 = \frac{S_n}{S_1} = \mathrm{e}^{-k(n-1)}.$$

El comportamiento de S_n/S_1 se muestra en la Figura 5 para ambos casos. Los valores obtenidos para k son:

$$k(\text{linealporpartes}) = 2.777 \pm 0.047$$
$$k(\text{cubico}) = 2.825 \pm 0.044$$

lo cual nos indica un comportamiento bastante parecido en ambos casos. Finalmente, para el cálculo de la dimensión fractal, tendremos en nuestro caso:

$$D = \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{r_n}\right)} = \frac{2\ln N}{k(n-1)} \tag{7}$$

donde la dependencia con n aparece justamente debido a que r_n es no lineal y que si $n \to \infty$, $D \to 0$,

[1] Estructuras complejas en el espacio de parámetros denominadas así por la forma que tienen. Poseen cuatro "patas" formadas por secuencias infinitas de desdoblamientos de período, así como por regiones caóticas adyacentes. Para simplificar, nos referiremos a "camarones" como estructuras definidas por las cascadas de desdoblamientos que los forman (ver detalles en Gallas (1994))

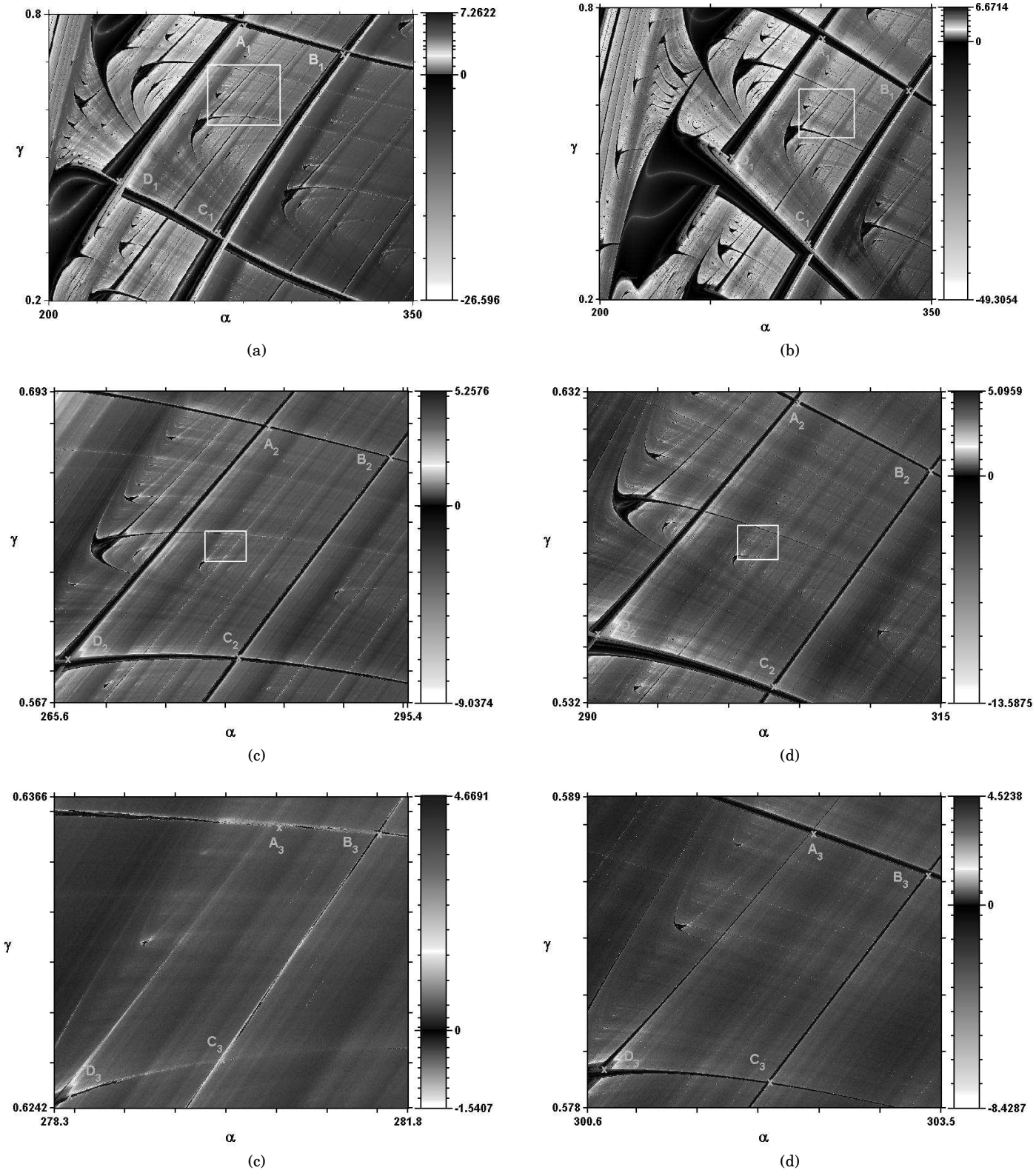

FIG. 2.— (Color online) Sección del espacio de parámetros γ vs. α para $\beta = 1000.0$ que presenta similaridades estructurales para los casos: lineal por partes (columna izquierda) y cúbico (columna derecha). **(a, b)** Panoramas globales, donde se distinguen los hubs más importantes. (c,d) Magnificación de los rectángulos observados en (a) y (b). **(e, f)** Magnificación de los rectángulos observados en (c) y (d). El código de colores de las barras indica el valor de los mayores exponentes de Lyapunov.

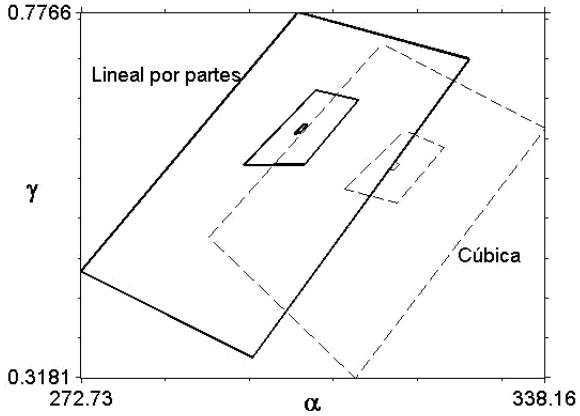

FIG. 3.— Silueta de las estructuras autosimilares en el espacio de parámetros γ vs. α tanto para la no linealidad cúbica (líneas de trazos) como para la lineal por partes (líneas continuas).

lo que resulta natural pues la estructura autosimilar tenderá a ser un punto. Tomando el valor $n = 2$, se obtiene:

$$D_{\text{linealporpartes}} = 1.582 \pm 0.027$$
$$D_{\text{cubico}} = 1.556 \pm 0.024. \quad (8)$$

De esta manera, hicimos la estimación de la dimensión fractal aprovechando el carácter autosimilar de las estructuras consideradas. Existen otros métodos de calcular la dimensión fractal como el conteo de cajas (counting box) que es uno de los métodos de base de la mayoría del software especializado en este tipo de cálculo.

Cabe señalar que para la determinación de las coordenadas de los vértices, se intentó mediante el zoom de las Figuras 2a-2f tomar regiones en las cuales existía una intersección de líneas de estabilidad con los menores valores del exponente de Lyapunov; sin embargo, es evidente que una determinación más precisa se puede realizar magnificando las regiones adyacentes a los vértices con la misma precisión de las figuras precedentes.

4. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

El presente trabajo mostró que las dos no linealidades consideradas presentan grandes similitudes en cuanto a sus estructuras en el espacio de parámetros. Por un lado, estudiando una amplia región del espacio de parámetros como en la Figura 2, se pudo establecer el isomorfismo que existe entre las estructuras presentes para ambas no linealidades, resultado que confirma el análisis elaborado en Avila & Gallas (en preparación). Por otra parte, las autosimilaridades observadas en el espacio de parámetros permitieron la estimación de la dimensión fractal de estas estructuras mediante un cálculo sencillo. Los valores obtenidos para esta dimensión fractal demuestran una vez más las semejanzas en ambos casos.

Este tipo de análisis puede ser complementado mediante otros métodos de estimación de la dimensión fractal tales como el de box-counting que es utilizado por software para tal efecto tales como FRACLAB ®;

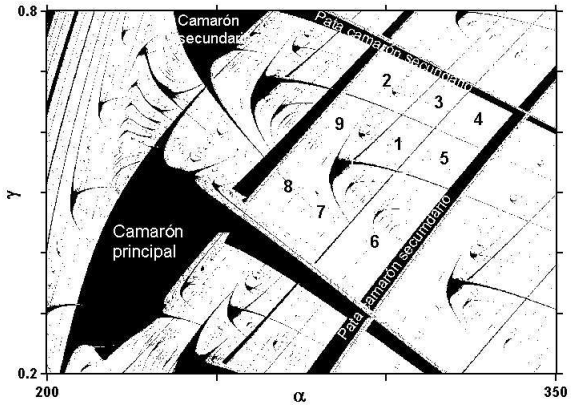

FIG. 4.— Identificación de las estructuras útiles para el cálculo de la dimensión fractal. Se muestra al camarón principal y partes de dos camarones secundarios, con cuyas patas se forma la estructura rectangular, la misma que tendrá a su vez un camarón principal y dos secundarios para formar una nueva estructura rectangular. Dentro de la estructura rectangular, se pueden identificar $N = 9$ subestructuras rectangulares que están enumeradas, siendo la 1 aquella formada por las patas del camarón principal y los secundarios.

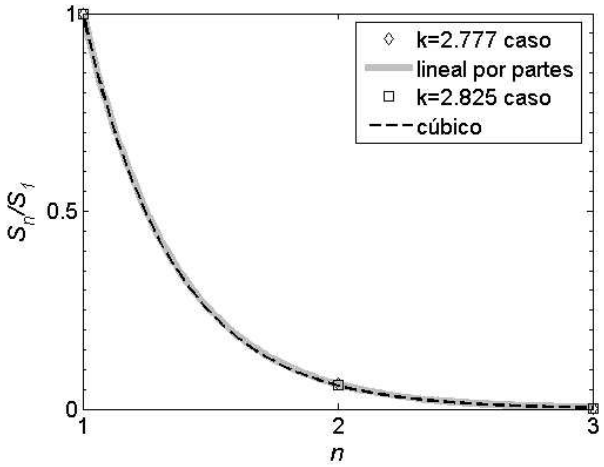

FIG. 5.— Resultados de la regresión exponencial para la estimación del factor r_n de las estructuras autosimilares para las no linealidades cúbica (línea negra de trazos) y lineal por partes (línea gris continua). Se nota que en ambos casos el factor k es muy parecido.

sin embargo, se debe tener en cuenta que la parte esencial es obtener las gráficas con la mejor resolución posible para mejorar la estimación de la dimensión fractal.

La consideración de un modelo para el circuito de Chua con una no linealidad cúbica y un conjunto de tres ecuaciones diferenciales con seis parámetros (Tsuneda 2005) resulta atractivo para futuros estudios sobre todo considerando la mayor facilidad para un tratamiento analítico, así como para ver la influencia del parámetro ligado al término cúbico en la primera de las ecuaciones del sistema.

Podría resultar interesante aplicar nuevos métodos en la obtención de diagramas de fase tales como los expuestos en: N. Marwan & Kurths

TABLA 1
POSICIONES DE LOS PUNTOS (COORDENADAS DE LOS VÉRTICES DE LOS CASI RECTÁNGULOS) QUE CARACTERIZAN LAS AUTOSIMILARIDADES PARA LA PORCIÓN DEL ESPACIO DE PARÁMETROS MOSTRADA EN LA FIGURA 2. ASIMISMO, SE MUESTRA LA LONGITUD DE LOS LADOS DE LOS TRIÁNGULOS $\triangle\widehat{A_iB_iC_i}$ NECESARIAS PARA EL CÁLCULO DE LAS ÁREAS S_i

Caract.	i	A_i (α,γ)	B_i (α,γ)	C_i (α,γ)	D_i (α,γ)	$\overline{A_iB_i}$	$\overline{B_iC_i}$	$S_i = \frac{(B_iC_i)(A_iB_i)}{2}$
Lineal por partes	1	(279.27, 0.7767)	(319.95, 0.7178)	(268.44, 0.3433)	(227.72, 0.4525)	40.68	51.51	1047.83
	2	(283.46, 0.6788)	(293.68, 0.6665)	(280.85, 0.5859)	(266.46, 0.5849)	10.22	12.83	65.59
	3	(280.49, 0.6354)	(281.49, 0.6351)	(279.93, 0.6261)	(278.42, 0.6247)	0.992	1.557	0.773
Cúbica	1	(299.34, 0.7371)	(338.16, 0.6314)	(293.10, 0.3180)	(258.26, 0.4944)	38.82	45.06	874.67
	2	(304.70, 0.6286)	(314.07, 0.6065)	(302.94, 0.5375)	(290.52, 0.5545)	9.371	11.13	52.15
	3	(302.43, 0.5877)	(303.37, 0.5862)	(302.07, 0.5789)	(300.71, 0.5794)	0.942	1.296	0.611

(2009); R. V. Donner & Kurths (2010) basados en las denominadas redes de recurrencia y ver la factibilidad de los mismos en el análisis de periodicidades y caos.

Se tiene proyectado obtener datos experimentales que permitan verificar -grosso modo- las regiones periódicas y caóticas obtenidas mediante el cálculo numérico.

Finalmente, dado el elevado número de distintas series de estructuras autosimilares que se observa en la Figura 2, un aspecto adicional interesante sería el de investigar cuáles de tales estructuras se prestan mejor para caracterizar las propiedades métricas del espacio de parámetros de ambas no linealidades en el circuito de Chua.

AGRADECIMIENTOS

GMRA agradece al Deutscher Akademischer Austausch Dienst (DAAD) por la beca de investigación otorgada. JACG agradece al Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por el financiamiento para la investigación y también agradece a la Air Force Office of Scientific Research (AFOSR) por el apoyo bajo contrato FA9550-07-1-0102.

REFERENCIAS

A. I. Khibnik, D. R. & Chua, L. O. 1993, International Journal of Bifurcation and Chaos, 3, 363
Albuquerque, H. A. & Rech, P. C. 2009, International Journal of Bifurcation and Chaos, 19, 1351
Avila, G. M. R. & Gallas, J. A. C. 2008, Revista Boliviana de Fíisica, 14, 1
—. en preparación, Quantification of regular and chaotic oscillations of Chua's circuit
C. Bonatto, J. C. G. & Gallas, J. A. C. 2005, Physical Review Letters, 95, 1439
Chua, L. O. & Lin, G. N. 1990, IEEE Transactions on Circuits and Systems, 37, 885
Conde, G. & Avila, G. M. R. 2007, Revista Boliviana de Fíisica, 13, 58
Deregel, P. 1993, Journal of Circuits, Systems and Computers, 3, 309
E. Bilotta, P. P. & Stranges, F. 2007a, International Journal of Bifurcation and Chaos, 17, 1
—. 2007b, International Journal of Bifurcation and Chaos, 17, 293
Gallas, J. A. C. 1993, Physical Review Letters, 70, 2714
—. 1994, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 202, 196
—. 2010, International Journal of Bifurcation and Chaos, 20, 197
H. A. Albuquerque, R. M. R. & Rech, P. C. 2008, Physics Letters A, 372, 4793
Huang, A. 1996, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 43, 691
K. Thamilmaran, M. L. & Venkatesan, A. 2004, International Journal of Bifurcation and Chaos, 14, 221
Kahlert, C. & Chua, L. O. 1992, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 39, 222
Kennedy, M. P. 1993, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 40, 657
L. O. Chua, C. W. Wu, A. H. & Zhong, G. Q. 1993a, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 40, 732
—. 1993b, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 40, 745
L. O. Chua, M. K. & Matsumoto, T. 1986, IEEE Transactions on Circuits and Systems, 33, 1072
L. O. Chua, Y. Y. & Yang, Q. 1986, International Journal of Circuit Theory and Applications, 14, 315
L. Pivka, A. L. Z. & Chua, L. O. 1994, International Journal of Bifurcation and Chaos, 4, 1743
M. S. Baptista, M. B. Reyes, J. C. S. C. G. & Rosa, E. J. 2003, International Journal of Bifurcation and Chaos, 13, 2551
Mira, C. 1997, International Journal of Bifurcation and Chaos, 7, 1911
N. Marwan, J. F. Donges, Y. Z. R. V. D. & Kurths, J. 2009, Physics Letters A, 373, 4246
Nicolis, G. 1995, Introduction to Nonlinear Science (Cambridge: Cambridge University Press)
R. V. Donner, Y. Zou, J. F. D. N. M. & Kurths, J. 2010, New Journal of Physics, 12, 033025
Schroeder, M. 1992, Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise (Freeman)
T. Matsumoto, L. O. C. & Kobayashi, K. 1986, IEEE Transactions on Circuits and Systems, CAS-33, 1143
T. Matsumoto, L. O. C. & Tokunaga, R. 1987, IEEE Transactions on Circuits and Systems, CAS-34, 240
Tel, T. & Gruiz, M. 2006, Chaotic Dynamics, An Introduction Based on Classical Mechanics (Cambridge: Cambridge University Press)
Tsuneda, A. 2005, International Journal of Bifurcation and Chaos, 15, 1
Zhong, G. Q. 1994, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 41, 934