KURT GÖDEL, GIGANTE DE LA LÓGICA

Luís Crespo Ostria

Departamento de Ciencias Exactas

KURT GÖDEL, no sólo ha sido el más brillante lógico del Siglo XX y quizá de la historia, sino el que más desconcierto ha sembrado. Sus descubrimientos establecen auténticas e insalvables limitaciones al poderío de la matemática y de la mente humana.

Kurt Gödel nació en 1906 en Brünn (Imperio Austro-Húngaro), ahora Brno en la República Checa. Falleció en 1978 en Princeton, New Jersey, EE.UU..

Gödel estudió en la Universidad de Viena obteniendo su doctorado en 1929 con una tesis sobre la "Suficiencia del Cálculo Lógico de Primer Orden", su primer logro de importancia excepcional (y de gran densidad intelectual, sólo 11 páginas). En 1930 entró a formar parte del claustro de profesores de la Universidad de Viena.

En 1931, con sólo 25 años, publicó su logro principal que hoy es conocido como el TEOREMA DE INCOMPLETITUD DE GÖDEL, posiblemente el descubrimiento matemático más importante del Siglo XX (igualmente denso, sólo 25 páginas).

En marzo de 1938 Austria fue anexada a Alemania y en ese ambiente enrarecido Gödel, . que siempre había evitado tomar posición política, tuvo dificultades porque parece que lo veían como un judío, que no era, aunque tenía muchos amigos judíos; una vez fue atacado por una pandilla de jóvenes nacionalsocialistas que lo creyeron judío cuando caminaba con su esposa en Viena. A finales de 1939, temiendo ser reclutado en el ejército nazi, huyó a EE.UU. atravesando Rusia en el ferrocarril transiberiano y pasando por Japón. Lo acompañaba su esposa.

En 1940 Gödel llegaba a EE.UU, incorporándose al Instituto de Estudios Avanzados de Princeton (donde ya era conocido por haber sido conferencista en dos ocasiones anteriores), que reunía en ese momento a lo más granado de los científicos europeos – Einstein, Weyl, von Neumann, Fermi, Ulam, Teller (von Neumann y Fermi trabajaron en la bomba atómica, Ulam y Teller en la bomba de hidrógeno),…….- que habían tenido que huir de la pesadilla hitleriana. Con ellos pasó también definitivamente la vanguardia de la ciencia mundial, de Alemania y Europa a EE.UU. Allí en Princeton Gödel se quedaría el resto de su vida. En 1948 adquirió la nacionalidad estadounidense.

Ya establecido en EE.UU., produjo otro trabajo de enorme importancia que venía meditando desde 1938, titulado "Consistencia del Axioma de Elección y la HIPÓTESIS DEL CONTINUO generalizada con los axiomas de la Teoría de Conjuntos"(1940).

Uno de sus amigos más cercanos en Princeton fue su vecino de oficina Albert Einstein, se tenían una gran estimación mutua y hablaban con frecuencia. No está claro cuánto influyó Einstein para que Gödel trabajara en Relatividad, pero ciertamente se ocupó creativamente de cosmología relativista , encontró soluciones sorprendentes a las ecuaciones del campo gravitatorio de la Relatividad General que determinan universos rotatorios y fascinantes en los que el tiempo pierde su sentido habitual.

El trabajo de Gödel inició nuevas ramas de estudio de la Lógica Matemática. Provocó una revolución de las filosofías matemáticas y más aún de las filosofías del conocimiento en general.

En 1951 recibió el primer Premio Einstein y en 1974 la Medalla Nacional de Ciencias. Fue miembro de la Academia Nl. De Ciencias de EE.UU., de la Royal Society, del Instituto de Francia, de la Royal Academy y miembro Honorario de la London Mathematical Society. Sin embargo él rechazó la membresía de la Academia de Ciencias de Viena y más tarde cuando fue elegido Miembro Honorario de la misma también rechazó, igualmente rechazó la Medalla Nacional para científicos que Austria le ofreció.

A partir de 1955 le llovieron los premios y honores científicos. Tras tan importantes descubrimientos que han hecho de Gödel una figura casi mítica para lógicos y matemáticos, podría pensarse que su nombre fuera ampliamente conocido.

Pero la matemática no es una ciencia popular, según testimonio de Bourbaki cierto profesor universitario estadounidense afirmó en el curso de una conferencia – y en presencia del propio Gödel – que nada nuevo se había visto en lógica desde los tiempos de ***Aristóteles*.**

El Teorema de Incompletitud de Gödel.

En 1931 Gödel, con 25 años, publicó en una revista científica alemana un artículo que fue leído y entendido solamente por unos pocos matemáticos. Llevaba el impresionante título "Sobre proposiciones formalmente indecidibles de **Pricipia Mathematica** y sistemas relacionados" (**Principia Mathematica** es el famoso libro escrito conjuntamente por Bertrand Russell (1872-1970) y Alfred N. Whitehead (1861-1949)).

Todo sistema axiomático contiene postulados o axiomas (proposiciones aceptadas como verdaderas sin necesidad de demostración) de las que se deducen, con ayuda de la lógica, otras proposiciones llamadas teoremas.

El sueño de todo matemático es probar que su ciencia es consistente y completa.

Consistente quiere decir que nunca se deducirán dos teoremas que estén en contradicción, que no se puede deducir la verdad y la falsedad de una misma proposición.

Y que el sistema sea completo significa que toda proposición que haya sido o pueda ser pensada sea susceptible, con las armas de deducción del sistema, de ser probada o refutada su veracidad.

Un sueño del que nos despertó cruelmente en 1931 Kurt Gödel, al demostrar que si se toma un sistema de axiomas lo suficientemente amplio – que contenga los axiomas de la aritmética como mínimo – siempre existirán proposiciones cuya certeza o falsedad será imposible demostrar, es decir serán proposiciones indecidibles. Aunque la proposición se cumpla en todos los casos observados, no nos garantiza que no falle en un próximo caso.

El Teorema de Gödel también implica, para desencanto de muchos, que **las computadoras nunca podrán ser programadas para contestar toda pregunta matemática.**

Cuando una proposición sea indecidible, podríamos incorporarla – la proposición o su negación – como un nuevo axioma (y ya no necesito demostración alguna) y asunto resuelto. ¡ Pero habrá otra proposición indecidible en el nuevo sistema axiomático¡

Esto de incorporar proposiciones indecidibles como nuevos axiomas ya se ha hecho en dos notables casos:

(1) El famoso postulado de Euclides. ".Por un punto exterior a una recta pasa una, y sólo una, paralela a ella". Su incorporación como axioma (lo que hizo Euclides) dio lugar a la Geometría Euclídea, la incorporación de sus negaciones dio lugar a las Geometrías No-Euclídeas (nombre creado por Gauss)

(2) La Hipótesis del Continuo, otro postulado indecidible, aceptado como axioma por Georg Cantor da lugar a la Teoría de Conjuntos Cantoriana. Y su negación a la Teoría de Conjuntos No-Cantoriana.

(1) EL 5º POSTULADO DE EUCLIDES Y GEOMETRÍAS NO-EUCLÍDEAS.

La civilización griega clásica que dio origen a la Geometría Euclídea fue destruida por Alejandro Magno y reconstruida, según nuevas directrices en Egipto. Alejandro trasladó el centro de su imperio de Atenas a la ciudad que él inmodestamente llamó

Alejandría, y proclamó como su objetivo el de fusionar las civilizaciones griega y del Oriente Próximo. Este objetivo fue hábilmente ejecutado por sus sucesores, los Ptolomeos, que gobernaron Egipto desde el año 323 A.C. hasta que el último miembro de la familia, Cleopatra, fue seducida por los romanos. Bajo la influencia de las civilizaciones del Oriente Próximo, especialmente la egipcia y la persa, la cultura de la civilización greco-alejandrina se orientó más bien con mentalidad ingenieril y práctica. Los matemáticos respondieron a los nuevos intereses.

El texto matemático más universal que se conoce data del Siglo II A.C. y fue escrita en Alejandría, ciudad situada en el delta del Nilo. EUCLIDES , científico helénico, el primer axiomatizador de la matemática y , entre otros cargos, maestro de Ptolomeo, rey de Egipto, es el firmante del texto que, con el nombre de ELEMENTOS, dio la vuelta al mundo en siglos sucesivos. Se cuentan por centenares las ediciones y traducciones que hasta hoy se han publicado de los 13 libros (o capítulos) que componen el texto. Redescubiertos y venerados por los árabes, los Elementos se convirtieron en la Biblia científica de la baja Edad Media primero y en el punto de partida de los revolucionarios pensadores renacentistas después.

Los 9 libros que dedica Euclides a la geometría se basan en una serie de proposiciones dogmáticas-llamadas axiomas o postulados-, y a partir de ellos se elabora toda una doctrina.

El 5º Postulado de Euclides, en el Libro I de los Elementos, tiene un enunciado equivalente a lo siguiente: ”Por un punto exterior a una recta pasa una, y sólo una, paralela a ella”. El propio Euclides y centenares de sus sucesores se esforzaron estérilmente en demostrarlo a partir del resto de los axiomas de la geometría; a todos les parecía que no era un axioma sino un teorema, deducible por tanto de los axiomas. Todos los intentos fracasaron.

Según cuenta Proclo (Proclus de Bizancio, 410-485) en sus “Comentarios sobre el primer libre de Euclides”, uno de los primeros intentos lo hizo Posidonius (Siglo I A.C.) : dada una línea recta y una distancia “d”, uniendo todos los puntos que se hallan a la distancia “d” de la recta, creía Posidonius tener una paralela, pero…..¿la unión de esos puntos es una línea recta?

Euclides, al no poder demostrarlo como teorema lo adoptó como axioma y la geometría resultante se llamaría Geometría Euclídea.

Pero Karl F. GAUSS (alemán, llamado “el príncipe de las matemáticas”, 1777-1855), Nicolai LOBACHEVSKI (ruso y Rector de la Universidad de Kazan, 1792-1856) y Janos BOLYAI (húngaro,1802-1860), en trabajos de investigación independientes, postularon que por un punto exterior a una recta puede trazarse al menos dos paralelas (resulta que, de ser posible trazar dos, puede trazarse infinitas), dando lugar a una Geometría No-Euclídea.

G.F. Bernhard RIEMANN (alemán, fue discípulo de Gauss, 1826-1866) postuló que por un punto exterior no pasa paralela alguna, dando lugar a otra Geometría No-Euclídea (también llamada “de Riemann”).

Las tres geometrías llevan a propiedades y conclusiones muy distintas, tales como la suma de los ángulos interiores de un triángulo:

En la Geometría Euclídea la suma es siempre 180º.

En la Geometría de Gauss-Lobachevski- Bolyai, la suma es menor que 180º y además es variable, para triángulos pequeños como los que podemos ver en la geografía terrestre esa suma es muy poco menos que 180º y la diferencia no es detectable dentro de las imperfecciones de nuestros instrumentos de medida, pero para triángulos mucho mayores esa diferencia sería evidente.

En la Geometría de Riemann, la suma es mayor que 180º, igualmente poco es el exceso para triángulos pequeños, pero cuanto mayor es el triángulo , mayor también será el exceso sobre 180º.

No tardó en demostrarse (el italiano E.Beltrami en 1868 y el alemán F.Klein en 1871) que si alguna de las dos nuevas geometrías llega a presentar una contradicción, también se presentaría una contradicción en la Geometría Euclídea. Las Geometrías No-Euclídeas serían , por tanto, consistentes, pero esa consistencia es relativa pues reposa sobre la consistencia de la Geometría Euclídea, pero queda por probar realmente que la Geometría Euclídea es consistente. Bien es verdad que llevamos más de 2000 años probando teoremas geométricos sin que jamás hayamos podido probar, a la vez, un teorema y su contrario. Es tranquilizante aunque no definitivo.

Tal vez el lector está pensando que las Geometrías No-Euclídeas son sólo especulaciones intelectuales sin posibilidad de aplicación práctica, pero le interesará saber que la Geometría de Riemann encontró, en 1915, una insospechada aplicación en la teoría de la **Relatividad General de Einstein** y una de sus consecuencias fue la bomba atómica de cuya estruendosa realidad nadie puede dudar.

Einstein desechó la Geometría Euclídea y adoptó para la geometría del Universo a la Geometría No-Euclídea de Riemann que desde entonces fue integrada en los cálculos astronómicos.

(2) LA HIPÓTESIS DEL CONTINUO.

Georg F. CANTOR (ruso-alemán, 1845-1918) es el creador de la célebre Teoría de Conjuntos. Sus ideas estaban claramente muy por delante de su tiempo y levantaron grandes controversias. Descubrió que más allá del infinito de los Números Naturales (*N)*--a cuyo cardinal (cardinal de un conjunto es el Nº de sus elementos) llamó aleph-sub-cero (aleph es la 1ª letra del alfabeto hebreo)—existen no solamente infinitos superiores sino un número infinito de ellos (infinitos alephs).

Los principales matemáticos del mundo se dividieron en dos bandos, Henri Poincaré llamó al "cantorismo" una enfermedad, y Hermann Weyl se refería a la jerarquía de los alephs establecida por Cantor como "niebla en la niebla".

Del otro lado David Hilbert (el mayor matemático de la 1ª mitad del Siglo XX) dijo: "Del paraíso que Cantor ha creado para nosotros, nadie nos echará", y Bertrand Russell elogió en cierta ocasión el descubrimiento de Cantor diciendo que es "probablemente el más importante que la época puede ostentar".

Actualmente la enorme mayoría de los matemáticos perdieron el miedo a los alephs, y las demostraciones mediante las cuales Cantor estableció sus "terribles dinastías" (como las llamó el escritor argentino **Jorge Luís Borges** en un cuento de claro trasfondo matemático que se titula "El Aleph") son universalmente reconocidas entre las más brillantes y bellas de la historia de la matemática.

Cantor demostró que el conjunto de los números pares, el conjunto de los números impares y el de los números primos, no obstante ser subconjuntos de *N* (los naturales), son también conjuntos infinitos de jerarquía aleph-sub-cero (igual que *N*). También demostró que los enteros (*Z*) positivos y negativos, los números racionales (*Q*) o fracciones, a pesar de contener a *N* son de infinitud igual en jerarquía que *N* (es decir tienen cardinalidad aleph-sub-cero). Las demostraciones de Cantor se basan en establecer una correspondencia biunívoca (biyectiva) entre conjunto y conjunto, y si esto es posible son conjuntos coordinables, equivalentes o equipotentes y tienen el mismo aleph.

El menor de los alephs (el primer infinito) es aleph-sub-cero y de los conjuntos infinitos de esa jerarquía se dice que son numerables (o enumerables).

Demostró luego que el conjunto de los números reales (*R*) o sea la recta real completa, tiene un cardinal infinito superior a aleph-sub-cero (*R* es "más infinito" que *N*); para su demostración Cantor se valió del ingenioso recurso de hacer corresponder a cada punto de la recta real un Nº natural y mostrar que los elementos de *N* (1,2,3,4,…..) no alcanzan para enumerar a los reales. Llamó "**c**" (por "el continuo", término con el que se designaba a la recta real) al cardinal de *R*, de modo que "**c**" es mayor que aleph-sub-cero. También demostró que el cardinal de un segmento (a,b) es "**c**" a pesar de que (a,b) es subconjunto de *R*.

En este punto es posible que se le ocurra al lector una pregunta: ¿existirá un conjunto infinito cuya cardinalidad sea intermedia entre aleph-sub-cero y "**c**"?, es decir ¿existirá en un segmento rectilíneo algún conjunto infinito de puntos que no sea equivalente al segmento entero y tampoco sea equivalente al conjunto *N*?

Tal pregunta ya se le ocurrió a Cantor, que no logró hallar ningún conjunto con tales características. Cantor conjeturó que tal conjunto no existía, a esta conjetura se dio en llamarla HIPÓTESIS DEL CONTINUO dando lugar a una Teoría de Conjuntos Cantoriana (o estándar). David Hilbert en el 2º Congreso Internacional de Matemáticas de París, en 1900, propuso 23 problemas no resueltos y cuyas resoluciones, consideraba Hilbert, serían avances importantes en las distintas ramas de la matemática; colocaba a la H. del Continuo en el 1er lugar de los 23 problemas.

Kurt Gödel en 1938-1940 demostró que no existe peligro en tomar la H. del Continuo como un axioma de la Teoría de Conjuntos sin que aparezca contradicción alguna, no era una demostración de la H. del Continuo, sino tan sólo una demostración de que tal hipótesis no puede ser refutada

Pero en 1963 Paul J. COHEN (estadounidense, 1934-2007), a los 29 años, dio el definitivo carpetazo a la cuestión probando que si se suponía que la H. del Continuo fuese falsa, tampoco se llegaba a ninguna contradicción.

Por lo tanto, no puede probarse que sea válida ni que sea falsa. Uno puede hacer con ella lo que quiera, razonar con ella o sin ella, o incluso contra ella dando lugar a una Teoría de Conjuntos No-Cantoriana (no estándar). Nunca incurrirá en contradicción, aunque, eso sí, edificará matemáticas distintas.

En 1964 Cohen fue galardonado con la Medalla Fields, premio máximo para los matemáticos que suple la no existencia de Premio Nobel para ellos.

BIBLIOGRAFÍA:

ASIMOV, I.: "Enciclopedia biográfica de ciencia y tecnología"
Alianza editorial. Madrid, 1971.

BONOLA, R.: " Non-Euclidean Geometry"
Dover. New York, 1955.

BOYER, C.B.: "A History of Mathematics"
John Wiley. New York, 1968.

DAVIS, P.J. & HERSH, R.: "The Mathematical Experience"
Burkhäuser. Boston, 1982.

EINSTEIN,A., LORENTZ,H.A., WEYL,H. & MINKOWSKI,H. :
"The Principle of Relativity"
Dover. New York, 1952.

EUCLIDES: "The Thirteen Books of THE ELEMENTS" (3 vol.)
Dover. New York, 1956.

GÖDEL, K.: "Obras completas"
Alianza editorial. Madrid, 1981.

KAC, M. & ULAM, S.M.: "Matemáticas y Lógica"
Monte Ávila Editores. Caracas, 1969.

KLINE, M.: "Mathematics in Western Culture"
Penguin Books. London, 1979.

KURATOWSKI, K.: "Intr. a la Teoría de Conjuntos y a la Topología"(2ª ed.)
Edit. Vicens-Vives. Barcelona, 1973.

LIPSCHUTZ, S.: "General Topology"
Mc-Graw-Hill. New York, 1965.

NAGEL, E. & NEWMAN, J.: "Gödel´s Proof"
New York University Press. New York, 1986.

RÍBNIKOV, K.: "Historia de las matemáticas"
Edit. Mir. Moscú, 1974.

RUCKER, R.: "Geometry, Relativity and the Fourth Dimension"
Dover. New York, 1977.

Scientific American: "Matemáticas en el mundo moderno"
Edit. Blume. Madrid, 1974.

SIMMONS, G.F.: "Introduction to Topology and Modern Analysis"
Kögakusha. Tokyo, 1963.

STILLWELL, J.: " Mathematics and Its History"
Springer-Verlag. Berlin, 1999.