Investigación y Tecnología Vol. 4. Nro. 2: pag1-pag 15. Diciembre 2016. ISSN 2306-0522

Algoritmo de *Fortune* sin eventos de círculo usando la primitiva *InCircle*

Fortune's algorithm without circle events using InCircle primitive

Lucio Torrico
Instituto de Investigaciones en Informática
Carrera de Informática
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Universidad Mayor de San Andrés
La Paz - Bolivia
Autor de correspondencia: luciotorrico@informatica.edu.bo

Resumen

Para hallar el diagrama de *Voronoi* (también llamado teselación de Dirichlet o polígonos de Thiessen) de un conjunto de puntos en el plano, el algoritmo de *Fortune* usa la propiedad de círculo vacío alrededor de los vértices de un modo implícito.

Todas las presentaciones de dicho algoritmo usan eventos de círculo sin cálculos explícitos de la primitiva *InCircle*.

El objetivo es averiguar si existe una versión alterna del algoritmo de *Fortune* sin eventos de círculo, utilizando exhaustivamente la primitiva *InCircle*.

Se ha diseñado dicha variante del algoritmo, argumentado sus basamentos y, además de la presentación, se incluye un ejemplo de ejecución que permite aclarar su uso.

Palabras clave: algoritmo de *Fortune*; diagrama de *Voronoi*; primitiva *InCircle*

Abstract

To find the Voronoi diagram (also called Dirichlet tessellation or Thiessen polygons) from a set of points in the plane, Fortune's algorithm use the empty-circle property around the vertices in an implicit way.

All presentations of this algorithm use circle-events without explicit calculations of the primitive InCircle.

Our goal is to find out if there is an alternate version of Fortune's algorithm without circle-events, using exhaustively the primitive InCircle.

We have designed this variant of the algorithm, argued their bases and, in addition to the presentation, include an execution example that allows clarify their use.

Keywords: *Fortune's algorithm; InCircle primitive; Voronoi diagram*

Introducción

Desde que (Guibas, L. J., Stolfi, J., 1989) dieron una nueva presentación al algoritmo de *Fortune* (Fortune, 1987) para el cálculo del diagrama de *Voronoi* de un conjunto ***C*** de sitios o puntos en 2D, dicha presentación se ha popularizado hasta convertirse prácticamente en un estándar (De Berg *et al*. 1997, O'Rourke 1994).

Aquí se presenta otra forma de calcular el diagrama, basados en dicho algoritmo pero sin utilizar eventos de círculo.

La versión estándar que se relata, utiliza los llamados eventos de círculo de manera explícita y exhaustiva a partir de tripletas en la línea de playa, calculando el circuncentro de la circunferencia definida por los sitios de la tripleta, y luego restando el radio (previamente calculado) para hallar el punto más bajo de dicha circunferencia.

En su lugar se calcula la primitiva *InCircle* para ver si un sitio está dentro del círculo definido por los tres sitios de una tripleta, de ser así la tripleta no es más que una falsa alarma. Si el sitio está fuera, o lo trabaja como un sitio más añadiéndolo a la línea de playa, o si está fuera y muy abajo se concluye que la circunferencia está vacía y define un vértice.

Primitiva *InCircle*

Dada una tripleta de puntos $\boldsymbol{p_1}$ $\boldsymbol{p_2}$ $\boldsymbol{p_3}$ no colineales (que en ese orden están en sentido antihorario), un nuevo punto $\boldsymbol{p_4}$ está dentro del círculo definido por la tripleta cuando:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{p}_{1x} & \mathbf{p}_{1y} & \mathbf{p}_{1x}^2 + \mathbf{p}_{1y}^2 & 1 \\ \mathbf{p}_{2x} & \mathbf{p}_{2y} & \mathbf{p}_{2x}^2 + \mathbf{p}_{2y}^2 & 1 \\ \mathbf{p}_{3x} & \mathbf{p}_{3y} & \mathbf{p}_{3x}^2 + \mathbf{p}_{3y}^2 & 1 \\ \mathbf{p}_{4x} & \mathbf{p}_{4y} & \mathbf{p}_{4x}^2 + \mathbf{p}_{4y}^2 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

Lo que se conoce como la primitiva ***InCircle***($\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{p_2},\boldsymbol{p_3},\boldsymbol{p_4}$) (Gravesen 2012).

Evento de sitio

Cuando un sitio nuevo está en la punta de la cola, debe manejarse: corta a un arco, define tripletas, etc.

Si está dentro del círculo de una tripleta previamente definida, dicha tripleta convergente es una falsa alarma, pues es una propiedad conocida (De Berg *et al*., 1997) que los vértices de un diagrama de *Voronoi* son el centro de círculos vacíos que tienen en el borde de su circunferencia tres (o más) sitios.

La variante

Para el cálculo del diagrama de *Voronoi*, no se maneja eventos de círculo, sólo eventos de sitio.

La cola de prioridad ***Q*** contienen los sitios clasificados de mayor a menor de acuerdo a su ordenada. La lista doblemente enlazada ***D*** alberga las aristas y los vértices.

Seguir manejando el concepto de tripleta, aunque los arcos centrales no apuntarán a nada en ***Q***. Sí tendrán un indicador de que son centros de tripleta en caso de convergencia.

Al bajar la línea de barrido: para determinar el nodo hoja que se corta, el orden de los subíndices de un nodo intermedio en el árbol ***T***, importa:

1) *menor,MAYOR* (por ej, <$\boldsymbol{p_2}$ $\boldsymbol{p_3}$>): representa una intersección izquierda (*)

2) *MAYOR,menor* (por ej, <$\boldsymbol{p_3}$ $\boldsymbol{p_2}$>): representa una intersección derecha

La variante se basa en el siguiente hecho: una tripleta convergente en el algoritmo estándar define un círculo, el arco central desaparece al llegar al *circle-event* añadiendo un vértice. Para el siguiente sitio ese arco ya no juega ningún rol (pues en dicho algoritmo estándar, se elimina). Ver un ejemplo en la Figura 1.

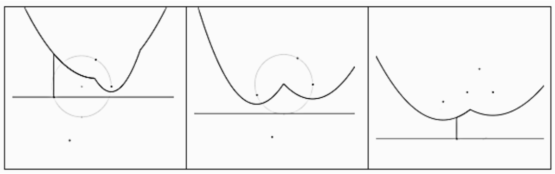


Figura 1: Desaparece el arco central
Fuente: Elaboración propia

Como no se tiene eventos de círculo, se debe identificar cuándo ha sobrepasado ese ficticio punto extremo de las ficticias circunferencias. Se explica con un ejemplo básico, pero generalizable: la línea de playa tiene este desarrollo (sin eventos de círculo). Luego de los tres primeros sitios:

$$LP = p_1\ p_3\ \underline{p_1}\ p_2\ p_1$$

Se ha marcado el sitio que desaparecería en el ficticio evento de círculo.

Cuando aparece p_4, cortará a p_3. El vecino derecho de p_3 es $\underline{p_1}$ que tiene un indicador de que es centro de tripleta.

Nótese que cuando el nuevo sitio está fuera de la circunferencia ficticia, el arco de parábola que debía desaparecer, señalado con una línea vertical correspondiente a $\underline{p_1}$, es tal que la situación de los arcos viene graficada según lo muestra la siguiente figura 2:

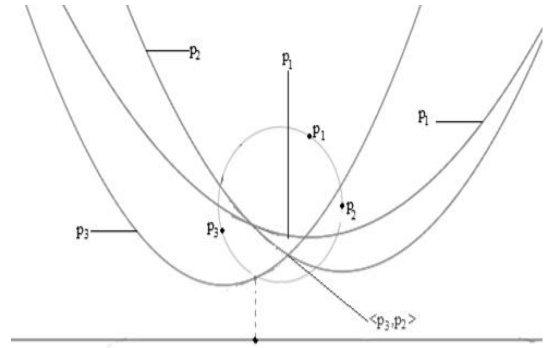


Figura 2: Situación de los arcos
Fuente: Elaboración propia

Si calcula la abscisa de la intersección entre los extremos de $p_3\ \underline{p_1}\ p_2$, es decir <$p_3$,$p_2$>, la ordenada de dicha intersección está más abajo que la ordenada del arco de parábola $\underline{p_1}$ calculada en dicha abscisa.

Ese será el dato que se necesita para eliminar $\underline{p_1}$.

Es interesante anotar que la abscisa de la intersección puede calcularse sin utilizar raíz cuadrada (*sqrt*).

Este es un ejemplo genérico, puede verse la misma situación en cualquier momento en que procesa los sitios de la cola, no sólo con los cuatro primeros sitios:

Los arcos que deben desaparecer, lo que era notorio en los eventos de círculo, ahora salen a la luz cuando están por encima de intersecciones.

Si un sitio nuevo cae dentro de una circunferencia, se eliminan la falsa alarma.

Si está fuera de la circunferencia:

- Es posible que esté por encima de la ficticia línea horizontal donde estaría el evento de círculo –ahora inexistente-, en cuyo caso debe tratarse como un sitio más.

- Es posible que esté debajo de dicha línea ficticia, en cuyo caso, dado que los sitios se trabajan en orden, la circunferencia define un vértice (eso se puede reconocer según lo dicho con ayuda de la Figura 2); entonces se define el vértice, desaparecen arcos y luego se trata el sitio como antes.

Debido a que no hay eventos de círculo, pueden existir iteraciones.

Métodos

Además de recurrir a la recopilación documental y su selección, principalmente se ha utilizado el método analítico deductivo y, dentro de él, esquemas usuales de demostración, técnicas de diseño de algoritmos, en particular los de barrido, así como técnicas de análisis de algoritmos, en particular los que conciernen a la complejidad temporal.

Resultados

El principal resultado es la construcción de la variante del algoritmo de *Fortune* sin eventos de círculo. Se muestra completo en la página siguiente.

En el Anexo se presenta un ejemplo de ejecución de la variante, mismo que termina de clarificar algunas partes.

Discusión

La variante presentada sigue perteneciendo a la clase de algoritmos de barrido y, al estar basado en el algoritmo de *Fortune* su complejidad temporal es ***O(n log n).***

Aunque ya no hay eventos de círculo, los arcos se añaden a la línea de playa o desaparecen de él iterativamente, en las estructuras "Mientras" del algoritmo.

Conclusiones

Se ha mostrado que con la ayuda de la primitiva *InCircle* explícitamente utilizada, puede construirse una alternativa de presentación del algoritmo de *Fortune* popularizado por (Guibas L. J., Stolfi J., 1989).

A diferencia de dicho estándar, la alternativa que se presenta no tiene eventos de círculo.

El ejemplo de ejecución (que puede verse en el Anexo) muestra operativamente la teoría de base y el algoritmo propiamente dicho en acción.

Tener una variante de cualquier algoritmo es muy común en Ciencias de la Computación, y pueden buscarse ventajas y beneficios de ella.

Agradecimientos

Un agradecimiento especial a los estudiantes que colaboraron temporalmente con este trabajo: Rodrigo Castillo, Gauss Carvajal, Fernando Tórrez, Leonardo Ríos y Adrian Fernández.

Referencias

De Berg, M., Van Kreveld, M., Overmars M., Scwarzkopf, O. (1997). *"Computational geometry"*. Springer.

Fortune, S. (1987). *"A Sweep line Algorithm for Voronoi Diagrams"*, Algorithmic, pp. 153-174.

Gravesen, J. (2012). *"Guide to Computational Geometry Processing"*. Springer.

Guibas, L. J., Stolfi J. (1989). "*Ruler, Compass, and Computer: The Design and*

Analysis of. Geometric Algorithms". *En "Theoretical Foundations of Comput. Graph. and CAD*", Vol. 40, pp. 111-165. Springer.

O'Rourke, C. J. (1994). *"Computational geometry"*. Cambridge University Press.

Presentado: La Paz, 25 de octubre de 2016

Aceptado: La Paz, 20 de Diciembre de 2016

Para el primer y segundo sitios se coloca p_1 p_2 p_1 en la línea de playa.
Se añade la arista p_1-p_2 a D.

Para cada siguiente sitio nuevo p_k en la cola de prioridad Q:
Sea p_i el sitio cortado por p_k. Vemos si el arco cortado, su predecesor o su sucesor tienen un indicador de centro de tripleta convergente. Para cada uno de ellos:

1) Mientras el predecesor del arco cortado tiene indicador de tripleta
AND
el nuevo sitio está fuera de la circunferencia definida por los tres sitios
AND
la ordenada de la intersección de las parábolas de los costados
(tomándolos en el orden señalado en (*))
es menor que (<) (en nuestro contexto está más abajo)
la ordenada de la parábola del predecesor considerado evaluada en la abscisa de dicha intersección :
La tripleta define un vértice: insertar vértice.
Añadir arista con los extremos de la tripleta.
Eliminar el sitio (arco) central α de la tripleta
En la nueva línea de playa,
verificar tripletas involucradas con el sitio eliminado, llamémoslo p_j:
Si predecesor de p_j tomado como centro de tripleta converge: añadir indicador
Si sucesor de p_j tomado como centro de tripleta converge: añadir indicador
Fin-Mientras
Si el predecesor del arco cortado tiene indicador de tripleta
AND
el nuevo sitio está dentro de la circunferencia definida por la tripleta:
borrar indicador (falsa alarma)

2) Mientras el sucesor del arco cortado tiene indicador de tripleta
AND
el nuevo sitio está fuera de la circunferencia definida por los tres sitios
AND
la ordenada de la intersección de las parábolas de los costados
(tomándolos en el orden señalado en (*))
es menor que (<) (en nuestro contexto está más abajo)
la ordenada de la parábola del predecesor considerado evaluada en la abscisa de dicha intersección :
La tripleta define un vértice: insertar vértice.
Añadir arista con los extremos de la tripleta.
Eliminar el sitio (arco) central α de la tripleta
En la nueva línea de playa,
verificar tripletas involucradas con el sitioeliminado, llamémosmlo p_j:
Si predecesor de p_j tomado como centro de tripleta converge: añadir indicador
Si sucesor de p_j tomado como centro de tripleta converge: añadir indicador
Fin-Mientras
Si el sucesor del arco cortado tiene indicador de tripleta
AND
el nuevo sitio está dentro de la circunferencia definida por la tripleta:
borrar indicador (falsa alarma)

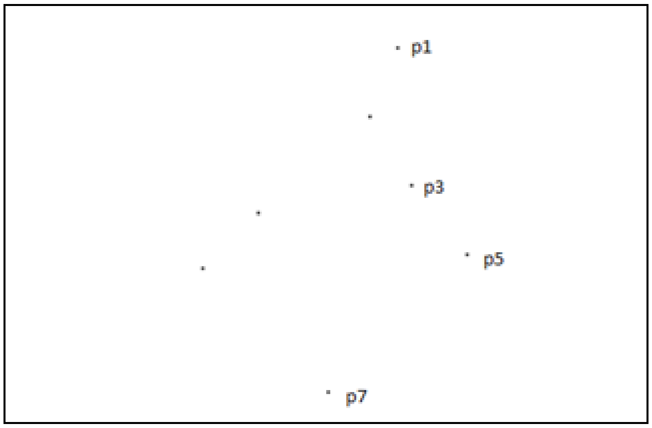
3)Si el arco cortado tiene indicador de tripleta:
Si el nuevo sitio está dentro de la circunferencia definida por los tres sitios correspondientes a la tripleta: borrar indicador (falsa alarma).

Insertar arista p_k-p_i.
Insertar p_k que (corta p_i) en la línea de playa.
Verificar tripletas (p_k el más izquierdo/derecho): si converge añadir indicador.

Terminación: (ya acabamos con todos los sitios p_k, cola de prioridad Q vacía)
Es posible que la línea de playa contenga sitios con indicador de tripleta:

Mientras haya sitios con indicador de tripleta
La tripleta define un vértice, añadirlo.
Añadir arista con los extremos de la tripleta.
Eliminar el sitio (arco) central α
En la nueva línea de playa,
verificar tripletas involucradas con el sitioeliminado, llamémosmlo p_j:
Si predecesor de p_j tomado como centro de tripleta converge: añadir indicador
Si sucesor de p_j tomado como centro de tripleta converge: añadir indicador
Fin-Mientras

ANEXO
EJEMPLO DE EJECUCIÓN DE LA VARIANTE

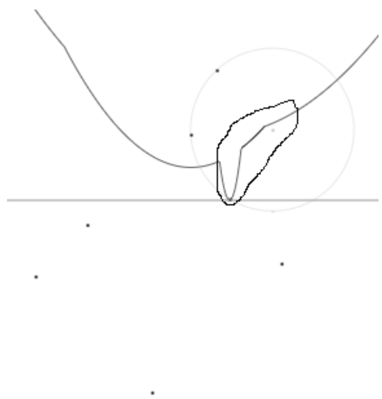


Q es la cola de prioridad que incluye los sitios y circle-event. Q = p_7 - p_6 - p_5 - p_4 - p_3 - p_2 - p_1 (p_1 es el frente de la cola)
Línea de Playa LP: nil
La lista doblemente enlazada de arcos D (que representa el Diagrama de Voronoi, que incluye aristas y vértices) está vacía.

Pop Q: p_1 y luego p_2

Q = p_7 - p_6 - p_5 - p_4 - p_3 LP = p_1 p_2 p_1 Añadir arista: D = p_1-p_2 Resumiendo: LP = p_1 p_2 p_1 Q = p_7 - p_6 - p_5 - p_4 - p_3 D = p_1-p_2

Pop Q : p_3 (corta a p_2 en LP = p_1 $\underline{p_2}$ p_1)



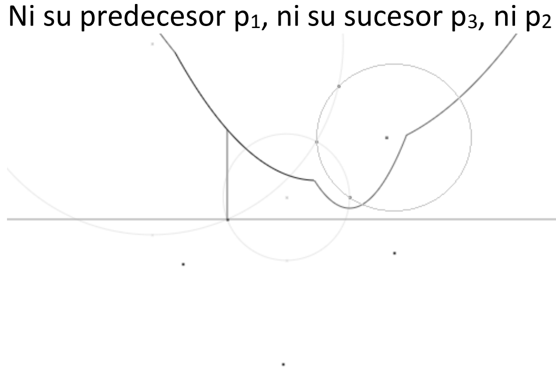
Insertar arista : D = p_1-p_2 p_2-p_3
Insertar sitio: LP = p_1 p_2 p_3 $p_2$$p_1$
Verificar tripletas de arcos consecutivos donde
el nuevo p_3 es el +derecho: p_1 p_2 p_3 no converge.
el nuevo p_3 es el +izquierdo: p_3 p_2 p_1 converge, añadimos un indicador de tripleta

(el color morado es nuestro indicador de centro de tripleta)

Resumiendo:
LP = p_1 p_2 p_3 p_2 p_1
Q = p_7 - p_6 - p_5 - p_4
D = p_1-p_2 p_2-p_3

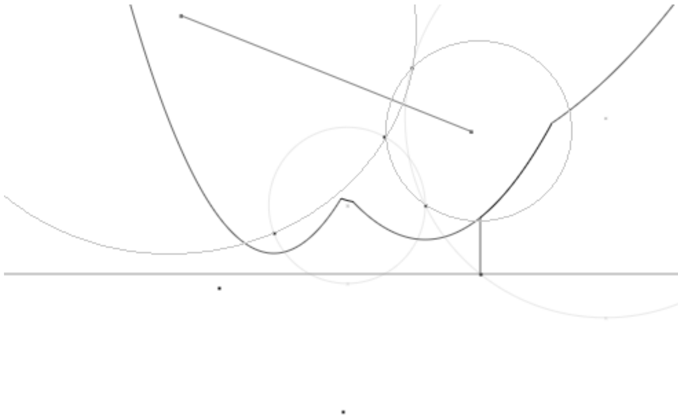
Pop Q : p_4 (corta a $p_2$en LP = p_1 $\underline{p_2}$ p_3 p_2 p_1)

Ni su predecesor p_1, ni su sucesor p_3, ni p_2 tienen indicador de tripleta.

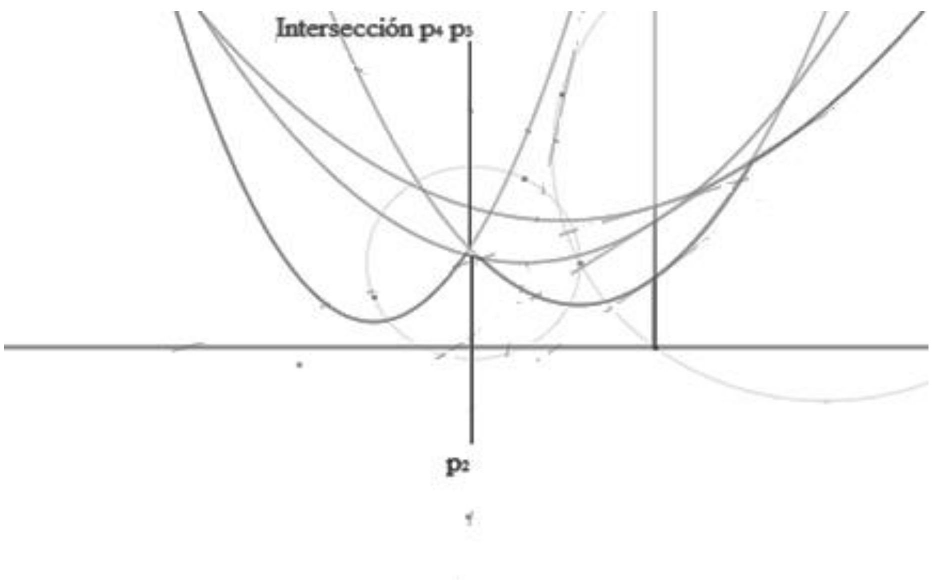


Insertar arista: D = p_1-p_2 p_2-p_3 p_2-p_4
Insertar sitio: LP = p_1 p_2 p_4 p_2 p_3 p_2 p_1
Verificar tripletas: $p_4$$p_2$$p_3$ converge añadir añadir indicador de tripleta
$p_1$$p_2$$p_4$ converge añadir añadir indicador de tripleta
Resumiendo:
LP = p_1 p_2 p_4 p_2 p_3 p_2 p_1
Q = p_7 - p_6 - p_5 - p_4
D = p_1-p_2 p_2-p_3 p_2-p_4

Pop Q : p_5 (corta a p_3 en LP = $p_1\ p_2\ p_4\ p_2\ \underline{p_3}\ p_2\ p_1$)

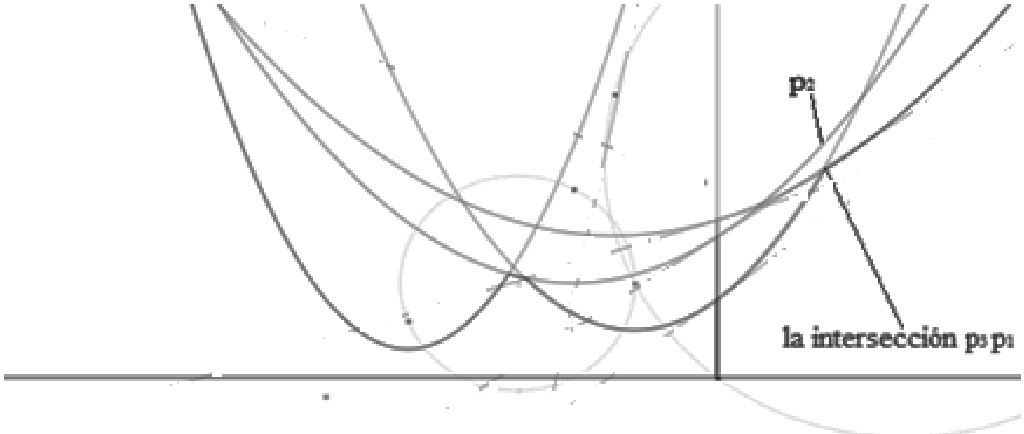


El predecesor p_2 tiene indicador.
El nuevo sitio p_5 está fuera de la circunferencia $p_4\ p_2\ p_3$.
Pero la ordenada de la intersección de las parábolas de los costados $p_{4,}p_3$
<u>no</u> es menor(no está más abajo) que la ordenada de la parábola de p_2



Tampoco el nuevo sitio está dentro de la circunferencia definida por la tripleta donde el predecesor p_2 es el arco central.

El sucesor p_2 tiene indicador.
El nuevo sitio p_5 está fuera de la circunferencia $p_3p_2p_1$.
Y la ordenada de la intersección de las parábolas de los costados p_3p_1
sí es menor(está más abajo) que la ordenada de la parábola de p_2



Insertar vértice y arista-extremosD = p_1-p_2 p_2-p_3 p_2-p_4 p_3-p_1 p_{c321}

Eliminamos el arco central p_2, LP = p_1 p_2 p_4 p_2 p_3 p_1

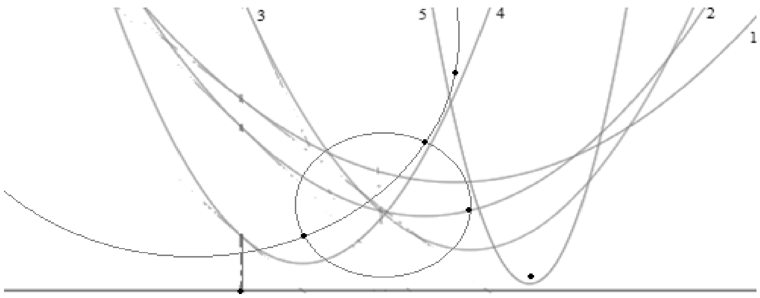
Verificar tripletas involucradas con el sitio eliminado p_2:
Su predecesor es p_3: $p_2p_3p_1$ no converge.
Su sucesor es p_1: $p_3p_1p_{nohay}$ no procede.

El sucesor del arco cortado p_3, que ahora es p_1 (ya) no tiene indicador.

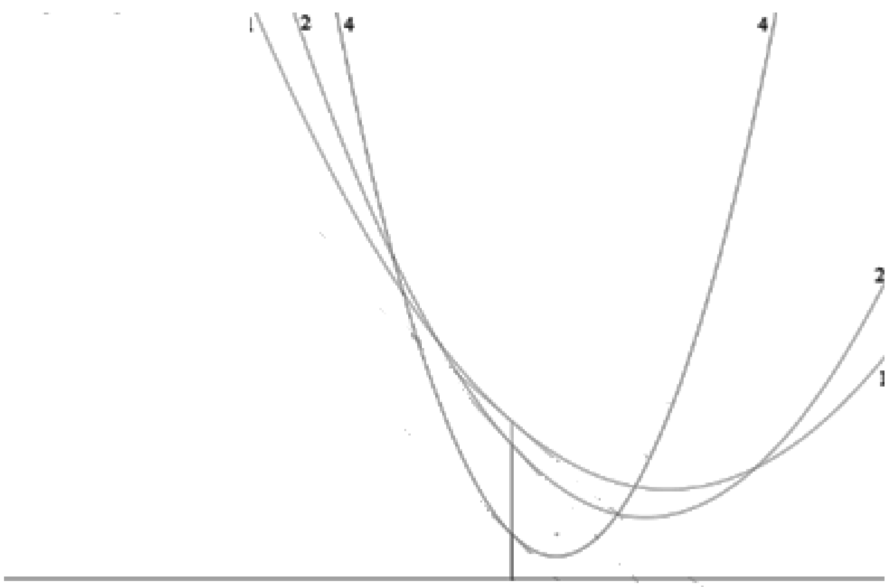
El arco cortado p_3 tampoco tiene indicador.

Insertar arista: D = p_1-p_2 p_2-p_3 p_2-p_4 p_3-p_1 p_3-p_5 p_{c321}
Insertar sitio: LP = p_1 p_2 p_4 p_2 p_3 p_5 p_3 p_1
Verificar tripletas:$p_5p_3p_1$ converge añadir añadir indicador de tripleta
$p_2p_3p_5$ no converge
Resumiendo:
LP = p_1 p_2 p_4 p_2 p_3 p_5 p_3 p_1
Q = p_7 - p_6
D = p_1-p_2 p_2-p_3 p_2-p_4 p_3-p_1 p_3-p_5 p_{c321}

Pop Q : p_6 (corta a p_4 en LP = $p_1\, p_2\, \underline{p_4}\, p_2\, p_3\, p_5\, p_3\, p_1$)



El predecesor p_2 tiene indicador.
El nuevo sitio p_6 está fuera de la circunferencia $p_1p_2p_4$.
Y la ordenada de la intersección de las parábolas de los costados p_1, p_4
sí es menor (está más abajo) que la ordenada de la parábola de p_2

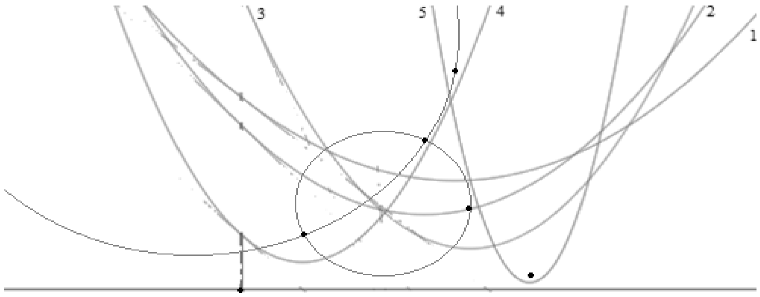


Insertar vértice y arista-extremos: D = p_1-p_2 p_2-p_3 p_2-p_4 p_3-p_1 p_3-p_5 p_1-p_4 p_{c321} p_{c124}

Eliminamos el arco central p_2, LP =$p_1\, p_4\, p_2\, p_3\, p_5\, p_3\, p_1$
Verificar tripletas involucradas con el sitio eliminado p_2:
Su predecesor es p_1: $p_{nohay} p_1\, p_4$ no procede.
Su sucesor es p_4: $p_1p_4p_2$ no converge.

El predecesor del arco cortado p_4, que ahora es p_1 (ya) no tiene indicador.

El sucesor p_2 tiene indicador.
El nuevo sitio p_6 está fuera de la circunferencia $p_4p_2p_3$.
Y la ordenada de la intersección de las parábolas de los costados p_4, p_3
sí es menor (está más abajo) que la ordenada de la parábola de p_2



Insertar vértice y arista-extremos: D = p_1-p_2 p_2-p_3 p_2-p_4 p_3-p_1 p_3-p_5 p_1-p_4 p_4-p_3 p_{c321} p_{c124} p_{c423}

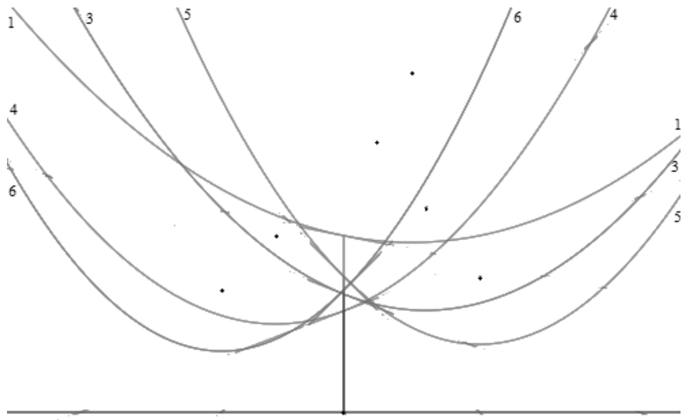
Eliminamos el arco central p_2, LP = p_1 p_4 p_3 p_5 p_3p_1
Verificar tripletas involucradas con el sitio eliminado p_2:
Su predecesor es p_4: $p_1p_4p_3$ no converge.
Su sucesor es p_3: $p_4p_3p_5$ converge añadir indicador de tripleta: LP = p_1 p_4 p_3 p_5 p_3 p_1

El sucesor del arco cortado p_4, que ahora es p_3 (ya) no tiene indicador.

El arco cortado p_4 tampoco tiene indicador.

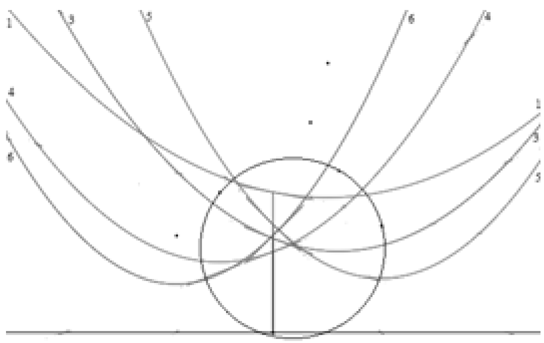
Insertar arista: D = p_1-p_2 p_2-p_3 p_2-p_4 p_3-p_1 p_3-p_5 p_1-p_4 p_4-p_3 p_4-p_6 p_{c321} p_{c124} p_{c423}
Insertar sitio: LP = LP = p_1 p_4 p_6 p_4 p_3 p_5 p_3p_1
Verificar tripletas: p_6 p_4 p_3 converge, añadir indicador de tripleta.
p_1 p_4 p_6 converge, añadir indicador de tripleta.
Resumiendo:
LP = p_1 p_4 p_6 p_4 p_3 p_5 p_3 p_1
Q = p_7
D = p_1-p_2 p_2-p_3 p_2-p_4 p_3-p_1 p_3-p_5 p_1-p_4 p_4-p_3 p_4-p_6 p_{c321} p_{c124} p_{c423}

Pop Q : p_7 (corta a p_4 en LP = $p_1\ p_4\ p_6\ \underline{p_4}\ p_3\ p_5\ p_3\ p_1$)



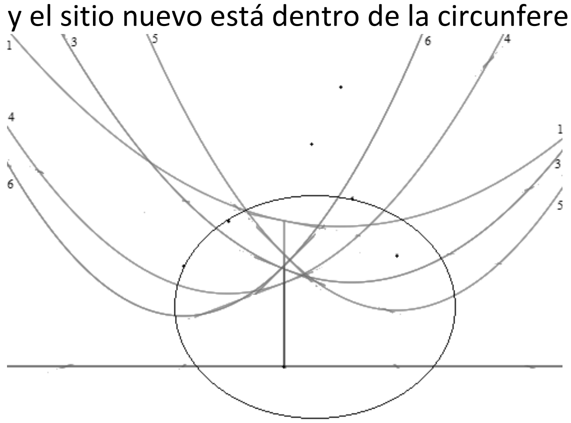
El predecesor p_6 no tiene indicador de tripleta.

El sucesor p_3 sí tiene indicador.
El nuevo sitio p_7 está dentro de la circunferencia $p_4p_3p_5$.



Borramos indicador de tripleta del sucesor p_3: LP = $p_1\ p_4\ p_6\ p_4\ p_3\ p_5\ p_3\ p_1$

El arco cortado p_4 tiene indicador
y el sitio nuevo está dentro de la circunferencia $p_6p_4p_3$



Borramos indicador de tripleta del arco central p_4: LP = $p_1\ p_4\ p_6\ p_4\ p_3\ p_5\ p_3\ p_1$

Insertar arista: D = p_1-p_2 p_2-p_3 p_2-p_4 p_3-p_1 p_3-p_5 p_1-p_4 p_4-p_3 p_4-p_6 p_4-p_7 p_{c321} p_{c124} p_{c423}
Insertar sitio: LP = p_1 p_4 p_6 p_4 p_7 p_4 p_3 p_5 p_3 p_1
Verificar tripletas: p_7 p_4 p_3 converge, añadir indicador de tripleta.
p_6 p_4 p_7 converge, añadir indicador de tripleta.
Resumiendo:
LP = p_1 p_4 p_6 p_4 p_7 p_4 p_3 p_5 p_3 p_1
Q = nil
D = p_1-p_2 p_2-p_3 p_2-p_4 p_3-p_1 p_3-p_5 p_1-p_4 p_4-p_3 p_4-p_6 p_4-p_7 p_{c321} p_{c124} p_{c423}

Terminación:
La cola está vacía pero la línea de playa contiene sitios con indicador de tripleta.
LP = p_1 p_4 p_6 p_4 p_7 p_4 p_3 p_5 p_3 p_1

Insertar vértice y arista-extremos para p_1 p_4 p_6:
D = p_1-p_2 p_2-p_3 p_2-p_4 p_3-p_1 p_3-p_5 p_1-p_4 p_4-p_3 p_4-p_6 p_4-p_7 p_1-p_6 p_{c321} p_{c124} p_{c423} p_{c146}
Eliminar arco central p_4:
LP = p_1 p_6 p_4 p_7 p_4 p_3 p_5 $p_3 p_1$
Verificar (en la nueva línea de playa) tripletas involucradas con el sitio eliminado p_4:
Su predecesor es p_1: $p_{nphay} p_1 p_6$ no procede.
Su sucesor es p_6: $p_1 p_6 p_4$ no converge.

Insertar vértice y arista-extremos para $p_6 p_4 p_7$:
D = p_1-p_2 p_2-p_3 p_2-p_4 p_3-p_1 p_3-p_5 p_1-p_4 p_4-p_3 p_4-p_6 p_4-p_7 p_1-p_6 p_6-p_7 p_{c321} p_{c124} p_{c423} p_{c146} p_{c647}
Eliminar arco central p_4:
LP = p_1 p_6 p_7 p_4 p_3 p_5 p_3 p_1
Verificar (en la nueva línea de playa) tripletas involucradas con el sitio eliminado p_4:
Su predecesor es p_6: $p_1 p_6 p_7$ no converge.
Su sucesor es p_7: $p_6 p_7 p_4$ no converge.

Insertar vértice y arista-extremos para $p_7 p_4 p_3$:
D = p_1-p_2 p_2-p_3 p_2-p_4 p_3-p_1 p_3-p_5 p_1-p_4 p_4-p_3 p_4-p_6 p_4-p_7 p_1-p_6 p_6-p_7 p_7-p_3
p_{c321} p_{c124} p_{c423} p_{c146} p_{c647} p_{c743}
Eliminar arco central p_4:
LP = p_1 p_6 p_7 p_3 p_5 p_3 p_1
Verificar (en la nueva línea de playa) tripletas involucradas con el sitio eliminado p_4:
Su predecesor es p_7: $p_6 p_7 p_3$ no converge.
Su sucesor es p_3: $p_7 p_3 p_5$ converge, añadir indicador de tripleta.
LP = p_1 p_6 p_7 p_3 p_5 p_3 p_1

Insertar vértice y arista-extremos para $p_7p_3p_5$:

D = p_1-p_2 p_2-p_3 p_2-p_4 p_3-p_1 p_3-p_5 p_1-p_4 p_4-p_3 p_4-p_6 p_4-p_7 p_1-p_6 p_6-p_7 p_7-p_3 p_7-p_5
p_{c321} p_{c124} p_{c423} p_{c146} p_{c647} p_{c743} p_{c735}

Eliminar arco central p_3:

LP = p_1 p_6 p_7 p_5 p_3 p_1

Verificar (en la nueva línea de playa) tripletas involucradas con el sitio eliminado p_4:

Su predecesor es p_7: $p_6p_7p_5$ no converge.

Su sucesor es p_5: $p_7p_5p_3$ no converge.

Insertar vértice y arista-extremos para $p_5p_3p_1$:

D = p_1-p_2 p_2-p_3 p_2-p_4 p_3-p_1 p_3-p_5 p_1-p_4 p_4-p_3 p_4-p_6 p_4-p_7 p_1-p_6 p_6-p_7 p_7-$p_3$$p_7$-$p_5$ p_5-p_1
p_{c321} p_{c124} p_{c423} p_{c146} p_{c647} p_{c743} p_{c735} p_{c531}

Eliminar arco central p_3:

LP = p_1 p_6 p_7 p_5 p_1

Verificar (en la nueva línea de playa) tripletas involucradas con el sitio eliminado p_4:

Su predecesor es p_5: $p_7p_5p_1$ no converge.

Su sucesor es p_1: $p_5p_1p_{nohay}$ no procede.

Hemos finalizado. El diagrama de Voronoi para el ejemplo es este:

D = p_1-p_2 p_2-p_3 p_2-p_4 p_3-p_1 p_3-p_5 p_1-p_4 p_4-p_3 p_4-p_6 p_4-p_7 p_1-p_6 p_6-p_7 p_7-p_3 p_7-p_5 p_5-p_1
p_{c321} p_{c124} p_{c423} p_{c146} p_{c647} p_{c743} p_{c735} p_{c531}

Podría verse así, <u>algunas</u> aristas y vértices presentes en D se señalan con flechas torpemente dibujadas: