

Aplicación del Método de Volúmenes Finitos para Análisis de Transferencia de Calor Unidimensional en Régimen Transitorio

Javier Alejandro Velasco Villarroel

Carrera de Ingeniería Mecánica, Facultad Nacional de Ingeniería
Universidad Técnica de Oruro
javelascov@yahoo.es

Dr. Eng. Ellie Luis Martínez Padilla

Laboratório de Mecânica dos Fluidos, Faculdade de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Uberlândia – Minas Gerais

Resumen

Se propone estudiar mediante el método de volúmenes finitos el fenómeno físico de transferencia de calor unidimensional en régimen transitorio.

Para ello se hace inicialmente la formulación general, integrando en el eje espacial y en el tiempo a partir de la ecuación diferencial general simplificada, utilizando una función de interpolación temporal, obteniendo así los coeficientes del sistema de ecuaciones característico al fenómeno físico. Además se obtienen las ecuaciones para los contornos a partir de un balance térmico en el tiempo actual.

Finalmente se hacen las formulaciones para la resolución explícita e implícita del sistema de ecuaciones, presentando un ejemplo de resolución, mostrando los valores obtenidos y la gráfica de los mismos.

Palabras clave: Volúmenes finitos, transferencia de calor, régimen transitorio.

Abstract

It's proposed to study the physical phenomenon of one-dimensional transient heat transfer with the Finite Volumes Method.

Initially, it's done the general formulation, making the integration along spatial and temporal axis, obtained from the simplified general differential equation, using a function of temporal interpolation; obtaining this way the coefficients of the linear equations system which represents the physical phenomenon. The equations for the borders are obtained with an energy balance in actual time, also.

Finally, the formulation for explicit resolution and implicit resolution of the equation system is obtained, presenting an example of resolution, and showing the values obtained and a graph representing those values.

Key works: Finite volume method, heat transfer, transient conduction.

Resumo

Propõe-se estudar, o fenômeno físico de transferência de calor unidimensional em regime transiente, utilizando o método dos volumes finitos.

Inicialmente é feita a formulação geral, fazendo a integração no eixo espacial e no tempo, a partir da equação geral simplificada, utilizando uma função de interpolação temporal, sendo obtidos desse jeito, os coeficientes do sistema de equações característico

ao fenômeno físico. Além disso, são obtidas as equações dos volumes que ficam nos contornos, obtidas a partir dum balance de energia no tempo atual.

Finalmente, são feitas as formulações para a resolução explícita e implícita do sistema de equações, apresentando um exemplo de resolução numérica, mostrando os valores obtidos e um gráfico destes valores.

Palavras chave: Volumes finitos, transferência de calor, regime transiente.

Introducción

En el presente artículo se realiza la formulación matemática para la resolución de un problema físico de transferencia de calor unidimensional en régimen transitorio, utilizando para ello el método de volúmenes finitos.

Desarrollo del Modelo Matemático General

Inicialmente, se parte de la ecuación general, que en términos conceptuales puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\text{Término Transiente} + \text{Término Adveectivo} = \text{Término Difusivo} + \text{Término Fuente}$$

En notación tensorial, esta ecuación es escrita de la siguiente forma:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S$$

En el caso de un problema de transferencia de calor, la variable genérica ϕ equivale a la temperatura T en el centro de cada volumen finito.

Asimismo, el término γ en este caso representa:

$$\gamma = \frac{k}{c_p}$$

Tomando en cuenta las siguientes consideraciones:

- Transferencia de calor en régimen transitorio, es decir, la temperatura varía en función del tiempo
- Transferencia de calor unidimensional, además se utilizarán coordenadas rectangulares; es decir, la temperatura solamente varía en función de la variable x , siendo las derivadas de la temperatura respecto de las otras variables espaciales iguales a cero.
- Al tratarse de un medio sólido a través del cual se realiza el proceso de transferencia de calor, no existe transporte de la temperatura, por lo tanto el término adveectivo es igual a 0.
- En el caso de los volúmenes ubicados en los extremos, el término fuente representa parte de la ecuación de transferencia de calor por convección que se realiza en los extremos. En todos los demás volúmenes, el término fuente es igual a cero.

La ecuación tensorial queda escrita como:

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

En general, los volúmenes finitos en la dirección del eje x se pueden representar de la siguiente forma:

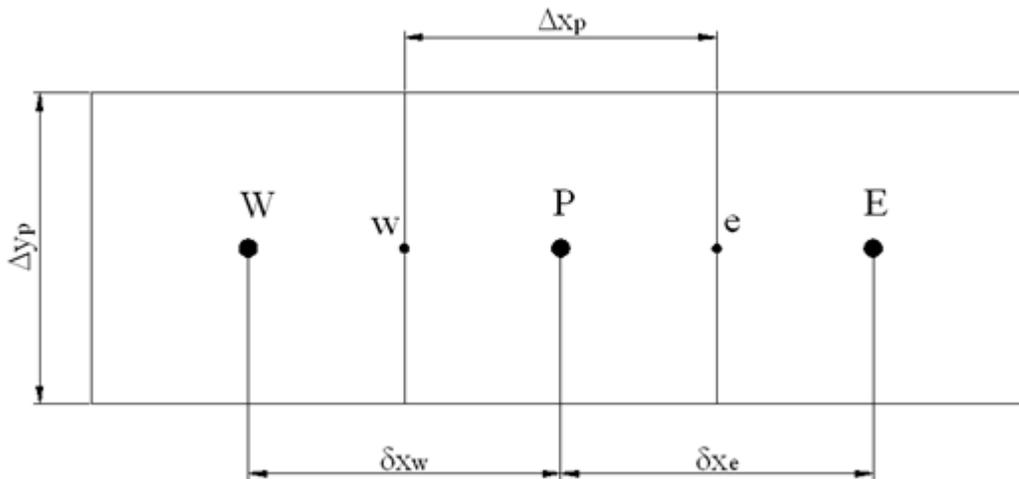


Figura 1. Volumen P y sus vecinos en el eje x.

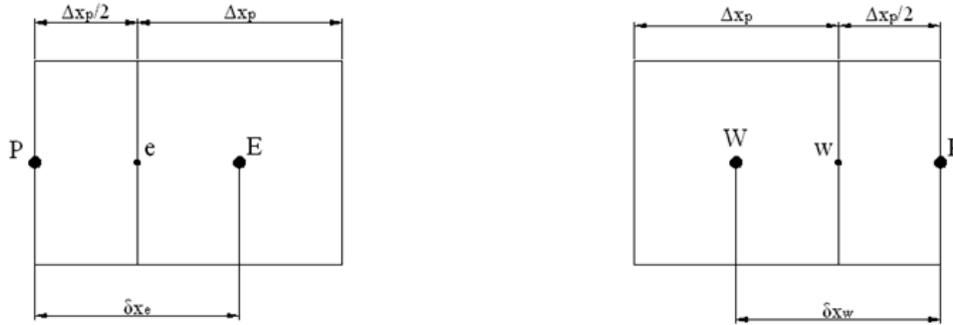


Figura 2. Volúmenes en los contornos izquierdo y derecho.

A continuación se procede a integrar esta ecuación con el fin de convertir dicha ecuación diferencial en derivadas parciales, en una ecuación lineal a partir del cual se formará un sistema de ecuaciones.

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} dx dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dt$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} dx dt = \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \int_t^{t+\Delta t} dt$$

$$(T_p^{t+\Delta t} - T_p^t) \rho \Delta x_p = \frac{k}{c_p} \left(\frac{\partial T}{\partial x_e} - \frac{\partial T}{\partial x_w} \right) \Delta t$$

Aproximando las derivadas mediante Serie de Taylor truncada:

$$T_p^{t+\Delta t} - T_p^t = \frac{k}{c_p} \frac{\Delta t}{\rho \Delta x_p} \left[f \left(\frac{T_E - T_P}{\delta x_e} - \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \right)^{t+\Delta t} + (1-f) \left(\frac{T_E - T_P}{\delta x_e} - \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \right)^t \right]$$

Por lo tanto, la ecuación lineal genérica puede ser expresada de la siguiente forma:

$$a_p^{t+\Delta t} T_p^{t+\Delta t} = a_p^t T_p^t + a_E^{t+\Delta t} T_E^{t+\Delta t} + a_W^{t+\Delta t} T_W^{t+\Delta t} + a_E^t T_E^t + a_W^t T_W^t + b^{t+\Delta t} + b^t$$

Donde los coeficientes son:

$$a_p^{t+\Delta t} = 1 + \frac{k}{c_p} \frac{\Delta t}{\rho \Delta x_p} \frac{f}{\delta x_e} + \frac{k}{c_p} \frac{\Delta t}{\rho \Delta x_p} \frac{f}{\delta x_w}$$

$$a_p^t = 1 + \frac{k}{c_p} \frac{\Delta t}{\rho \Delta x_p} \frac{(1-f)}{\delta x_e} - \frac{k}{c_p} \frac{\Delta t}{\rho \Delta x_p} \frac{(1-f)}{\delta x_w}$$

$$a_E^{t+\Delta t} = \frac{k}{c_p} \frac{\Delta t}{\rho \Delta x_p} \frac{f}{\delta x_e}$$

$$a_E^t = \frac{k}{c_p} \frac{\Delta t}{\rho \Delta x_p} \frac{(1-f)}{\delta x_e}$$

$$a_W^{t+\Delta t} = \frac{k}{c_p} \frac{\Delta t}{\rho \Delta x_p} \frac{f}{\Delta x_w}$$

$$a_W^t = \frac{k}{c_p} \frac{\Delta t}{\rho \Delta x_p} \frac{(1-f)}{\Delta x_w}$$

$$b^{t+\Delta t} = 0$$

$$b^t = 0$$

En el caso de una malla uniforme y con medios volúmenes en los contornos se tiene la siguiente expresión para las

$$T_p^{t+\Delta t} - T_p^t = \frac{k}{c_p} \left(\frac{T_E - T_P}{\delta x_e} - \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \right) \frac{\Delta t}{\rho \Delta x_p}$$

La temperatura resultante de la integración del término transiente corresponde a la temperatura en el centro de la célula P correspondiente a los instantes (t + Δt) y Δt respectivamente. En el caso de las temperaturas resultantes de la integración del término difusivo, corresponde a las temperaturas en los centros de los volúmenes E, P y W respectivamente, sin embargo, aún no ha sido asignado el instante de tiempo en el cual ocurren estas temperaturas.

Esta asignación se hará mediante una función de interpolación temporal, cuya ecuación es:

$$\int_{\Delta t} \phi_p dt = [f \phi_p^{t+\Delta t} + (1-f) \phi_p^t] \Delta t$$

La ecuación integrada queda de la siguiente forma:

dimensiones de cada célula en función del número total de volúmenes j:

$$\Delta x_p = \delta x_e = \delta x_j = \frac{L}{j-1}$$

Un parámetro adimensional conocido como número de Fourier está definido por:

$$Fo = \alpha \frac{t}{X^2}$$

Donde α , conocida como difusividad térmica, se define como:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

En este caso particular, el número de Fourier puede ser reescrito como:

$$Fo = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\Delta t}{\Delta x_p^2}$$

Con estas consideraciones, los coeficientes pueden ser reescritos de la siguiente manera:

$$a_p^{t+\Delta t} = 1 + 2fFo$$

$$a_p^t = 1 - 2(1-f)Fo$$

$$a_E^{t+\Delta t} = fFo$$

$$a_E^t = (1-f)Fo$$

$$a_W^{t+\Delta t} = fFo$$

$$a_W^t = (1-f)Fo$$

$$b^{t+\Delta t} = 0$$

$$b^t = 0$$

Para las fronteras, se utilizarán condiciones de contorno tipo A (medios volúmenes en los contornos, ver figura 2). A través de un balance térmico en el instante actual $t + \Delta t$, se tiene:

$$Q_{\text{sale}} - Q_{\text{entra}} = Q_{\text{generado}}$$

En este caso no existe generación interna de calor, por lo tanto se tiene:

$$Q_{\text{entra}} = Q_{\text{sale}}$$

Escribiendo en función de los mecanismos de transferencia de calor presentes se tiene:

$$Q_{\text{convección}} = Q_{\text{conducción}}$$

$$h(T_p - T_\infty) = k \frac{T_{PV} - T_p}{\delta_{xv}}$$

$$T_p = \frac{hT_\infty + \frac{k}{\delta_{xv}}T_{PV}}{\frac{k}{\delta_{xv}} + h}$$

La temperatura del medio fluido T_∞ permanecerá constante en el tiempo, T_{PV} representa la temperatura del volumen adyacente o vecino y δ_{xv} la distancia entre el centro del volumen ubicado en el contorno y el centro del volumen adyacente o vecino. Así también se considerará que no existe variación del coeficiente de convección h a lo largo del tiempo debido al valor constante de T_∞ .

Método Explícito

En el caso del método explícito, conocido también como Método de Euler, el valor de f es 0. Por lo tanto en este caso, los valores de cada coeficiente son:

$$a_p^{t+\Delta t} = 1$$

$$a_p^t = 1 - 2fFo$$

$$a_E^{t+\Delta t} = 0$$

$$a_E^t = Fo$$

$$a_W^{t+\Delta t} = 0$$

$$a_W^t = Fo$$

$$b^{t+\Delta t} = 0$$

$$b^t = 0$$

$$T_p^{t+\Delta t} = (1 - 2Fo)T_p^t + Fo * T_E^t + Fo * T_W^t$$

Como se puede ver, la temperatura en el volumen P en el instante actual, solamente depende de los valores de temperaturas de los volúmenes W, P y E en el instante anterior, que son valores ya conocidos, por lo tanto el cálculo es directo.

En el caso del método explícito, existe una restricción del coeficiente a_p^t para que sea positivo, ya que uno de los criterios de estabilidad para la resolución numérica del sistema de ecuaciones resultante indica que todos los coeficientes deben ser positivos:

$$a_p^t > 0$$

$$1 - 2Fo > 0$$

$$Fo < \frac{1}{2}$$

Esta restricción implica que, al deber mantenerse el valor del número de Fourier menor a 0.5, se debe ir jugando con los valores de tamaño de los volúmenes Δx_p y el tiempo entre cada iteración Δt . Según la relación de número de Fourier esta relación es directa, es decir, a mayor número de volúmenes en que se divida el cuerpo, Δx_p será menor y Δt será menor, lo cual implica que si queremos mayor precisión, se debe dividir en un número grande de volúmenes al interior del cuerpo, y realizar muchas iteraciones hasta alcanzar la estabilidad.

Método Implícito

En el caso del método implícito, el valor de f es 1. Por lo tanto, los valores de cada coeficiente son:

$$a_p^{t+\Delta t} = 1 + 2Fo$$

$$a_p^t = 1$$

$$a_E^{t+\Delta t} = Fo$$

$$a_E^t = 0$$

$$a_W^{t+\Delta t} = Fo$$

$$a_W^t = 0$$

$$b^{t+\Delta t} = 0$$

$$b^t = 0$$

$$(1 + 2Fo) * T_p^{t+\Delta t} = T_p^t + Fo * T_E^{t+\Delta t} + Fo * T_W^{t+\Delta t}$$

Se puede apreciar que la temperatura en el centro del volumen P en el tiempo actual, depende de la temperatura en dicho volumen en el tiempo anterior y de las temperaturas en los centros de los volúmenes E y W en el tiempo actual,

esto provoca que la resolución numérica de dicho sistema de ecuaciones debe ser hecha mediante un método iterativo.

Además, en este caso, todos los coeficientes son positivos y no existe ninguna restricción, por lo tanto, este método es más versátil, ya que se pueden ajustar los valores de Δx_p y Δt de acuerdo a las necesidades de cada problema específico.

Ejemplo de Resolución Numérica

A continuación se muestra un ejemplo de resolución de un problema de transferencia de calor unidimensional en régimen transitorio, cuya programación se hizo en C++, archivándose los resultados numéricos en un archivo .dat, que posteriormente fueron graficados mediante EES con las funciones New Plot y Overlay Plot.

Inicialmente la pieza fue calentada a una temperatura inicial T_0 exponiéndose de forma violenta a un medio fluido a temperatura T_∞ y coeficiente de convección h.

En este caso, se dividió el cuerpo en veintidós volúmenes internos más dos medios volúmenes ubicados en los extremos izquierdo y derecho. Se tomaron el instante inicial más veinte instantes de tiempo adicionales. Las propiedades térmicas del material corresponden a las propiedades del acero AISI 1020.

TABLA 1. Valores de las temperaturas obtenidas en el centro de cada volumen en cada instante de tiempo.

X = X/L	T ₀	4*ΔT	8*ΔT	12*ΔT	16*ΔT	20*ΔT
0,000000	500,000	310,553	273,787	250,964	234,460	221,612
0,023810	500,000	407,901	358,600	327,997	305,867	288,638
0,071429	500,000	467,185	421,456	389,693	365,571	346,262
0,119048	500,000	492,271	462,011	434,880	412,262	393,216
0,166667	500,000	500,000	484,528	464,962	446,304	429,405
0,214286	500,000	500,000	494,874	483,013	469,357	455,729
0,261905	500,000	500,000	498,764	492,693	483,797	473,758
0,309524	500,000	500,000	499,802	497,262	492,118	485,350
0,357143	500,000	500,000	500,000	499,135	496,504	492,313
0,404762	500,000	500,000	500,000	499,778	498,594	496,172
0,452381	500,000	500,000	500,000	499,958	499,463	498,043
0,500000	500,000	500,000	500,000	499,990	499,692	498,592
0,547619	500,000	500,000	500,000	499,958	499,463	498,043
0,595238	500,000	500,000	500,000	499,778	498,594	496,172
0,642857	500,000	500,000	500,000	499,135	496,504	492,313
0,690476	500,000	500,000	499,802	497,262	492,118	485,350
0,738095	500,000	500,000	498,764	492,693	483,797	473,758
0,785714	500,000	500,000	494,874	483,013	469,357	455,729
0,833333	500,000	500,000	484,528	464,962	446,304	429,405
0,880952	500,000	492,271	462,011	434,880	412,262	393,216
0,928571	500,000	467,185	421,456	389,693	365,571	346,262
0,976190	500,000	407,901	358,600	327,997	305,867	288,638
1,000000	500,000	310,553	273,787	250,964	234,460	221,612

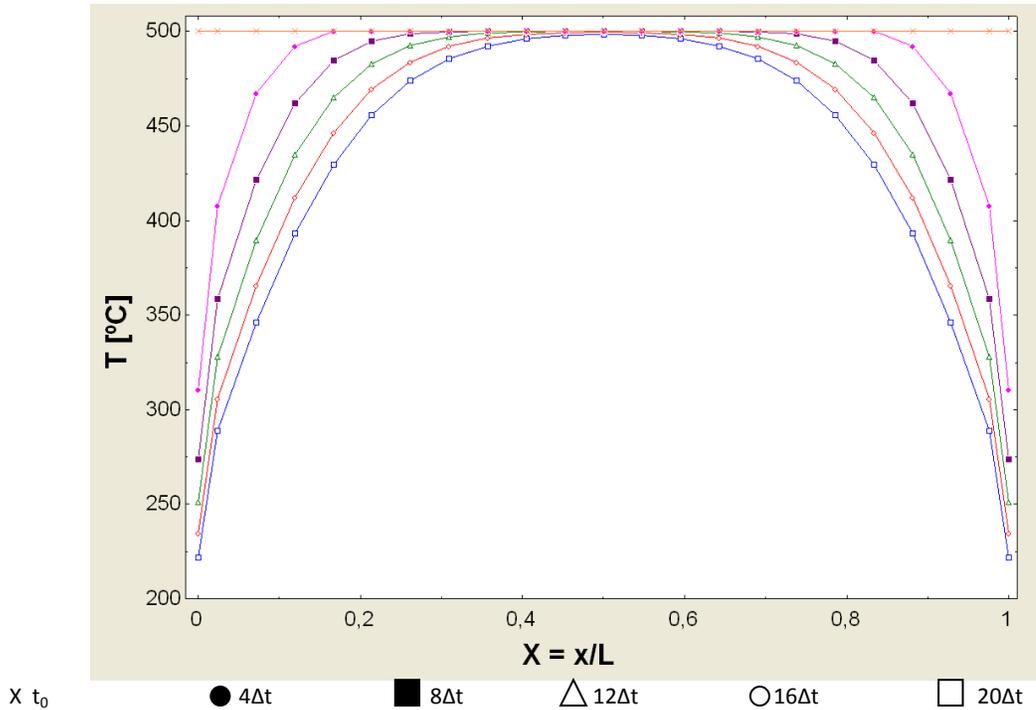


Figura 2. Gráfica de la solución obtenida numéricamente.

Posibles Aplicaciones y Recomendaciones

En el campo metalúrgico y de ciencia de materiales, el modelo matemático desarrollado, puede ser utilizado para el análisis de los diferentes procesos de tratamiento térmico, pudiendo hacerse algunas modificaciones en función de la geometría del material, que en algunos casos requerirá ampliar la formulación matemática para problemas bidimensionales o tridimensionales de transferencia de calor en régimen transitorio, ya que en estos procesos, la importancia del análisis se centra en la parte transitoria y no así en la permanente. Para geometrías más complejas, se deberá hacer uso de mallas no estructuradas que se adapten mejor a la geometría de la pieza a ser tratada, en este caso, el estudio fue hecho a partir de mallas estructuradas.

En los procesos de tratamiento térmico no será necesario ampliar la formulación para casos de "transporte" de la temperatura en algún medio fluido, pero por ejemplo, en procesos de fundición ó solidificación de aleaciones, puede ser utilizado el método de volúmenes finitos a través de modelos que impliquen transporte de propiedades a través de un medio fluido.

Referencias

KREITH, Frank; BOHN, Mark. "Principios de Transferencia de Calor". 6ª Ed. México: Thomson Learning, 2001.

PATANKAR, S.V. "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow". 1ª ed. New York: McGraw-Hill, 1980.

MALISKA, Clovis R. "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional". 2ª Ed. Sao Paulo: LTC, 1995.

Nomenclatura

ρ	Densidad
ϕ	Propiedad genérica a ser transportada
x_j	Representación genérica de las coordenadas espaciales
u_i	Representación genérica de la componente de la velocidad en una coordenada espacial
S	Término fuente, generación o destrucción de energía
k	Conductividad térmica
c_p	Calor específico
α	Difusividad térmica
P,E,W	Nodos P, E y W respectivamente
e,w	Fases e, w respectivamente
$\Delta x_p, \Delta y_p$	Tamaño de las células en los ejes x, y