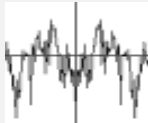


GEOMETRÍA FRACTAL Y COMPRESIÓN DE IMÁGENES CF- SFIP

Fractal, figura geométrica de estructura compleja y descrita por una superficie finita que tiene perímetro de longitud y número de vértices infinito en cualquier escala. El segmento más pequeño de un fractal representa ser una copia en menor escala de todo el fractal (propiedad de auto semejanza). Desde su teorización en 1890 por Henri Poincaré, pasando por los aportes de célebres matemáticos hasta 1970, estas figuras repetitivas se catalogaban como raras y sin mayor utilidad práctica. La recreación conceptual sobre el estudio de los fractales, fue posible a través de la geometría fractal desarrollada por el matemático polaco-francés Benoît B. Mandelbrot en 1975.



Karl Weierstrass

Definió, por primera vez, una curva continua no diferenciable.



Georg Cantor

Estableció sucesiones de segmentos conocidos como polvo de Cantor.



Oleg Lyapunov

Estudió sistemas dinámicos, tiempo de horizonte y exponente de Lyapunov (Caos de Lorenz).



Giuseppe Peano

Divulgó la curva que al describirse, pasa por todos los puntos del plano. Un ejemplo de fractal.



Helge Von Koch

Estableció el fractal copo de nieve. Curva no diferenciable cerrada y continua que no posee tangentes.



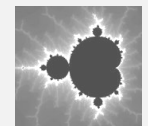
Wacław Sierpinski

Junto a Lindemayer utilizando el método de duplicación por similitud fraccionó un triángulo equilátero. Fractal que se dibuja con exactitud sin ayuda de un computador.



Gastón Julia

Todas las propiedades de fractales que estableció Julia por cálculos manuales y deducciones las pudo observar en la pantalla de su computador Mandelbrot.



Benoît Mandelbrot

Impulsor de la geometría fractal, asistida por computadora. Utilizó una definición más abstracta de dimensión que la impuesta por la geometría Euclídea, afirmando que la dimensión de un fractal se debe considerar matemáticamente como una fracción.

El conjunto de Mandelbrot tiene un borde infinitamente detallado, y su dimensión está entre uno y dos. La curva del *copo de nieve* tiene una dimensión fractal de 1,2618.....

Algoritmo de escape: Para cada punto se calcula una serie de valores repetitivos que deben cumplir con una condición, momento que asigna al punto el color relacionado con el número de repeticiones. La figura, se forma a partir de un plano complejo hipotético donde se escribe el círculo de radio dos (2) unidades y un punto Z centro de coordenadas ($Z = 0 + 0i$). Luego se toma un punto de prueba C , y se va desarrollando la fórmula:

$$Z = (Z^2) + C$$

Otros tipos de fractales:

Orbitas Caóticas: Fractales muy relacionados con la teoría del Caos, cumplen con el conjunto de ecuaciones de Lorenz describiendo una espiral. El sistema más común del atractor de Lorenz se representa mediante tres ecuaciones diferenciales no lineales: $dx/dt = a(y-x)$, $dy/dt = x(b-z)-y$, $dz/dt = xy-cz$. Donde $a = 10$, $b = 28$ y $c = 8/3$.

Aleatorios: Estructuras que dependen del azar (plasma, imágenes de difusión) únicas e irrepetibles. **Celulares:** autómatas que operan bajo reglas sencillas coloreando zonas a partir del color de otras zonas contiguas.

Características que definen una imagen fractal:

1. **Autosimilitud:** A diferentes escalas, siempre existen similitudes entre las partes más distantes de la misma figura fractal.
2. **Infinito Detalle:** Al ampliar un fractal, se obtienen mayores detalles sin llegar a límites donde aparecen diferencias o bloques.
3. **Dimensión no entera:** En contraposición con la geometría clásica, los fractales se diferencian por tener dimensiones fraccionarias.
4. **Las fórmulas y algoritmos** que definen imágenes fractales son relativamente simples y se pueden desarrollar a partir de un reducido número de datos.
5. **Algoritmia** determinada por secuencias clave *iterativas* asistidas por computador.

La compresión fractal

En 1987 el matemático inglés Michael Barnsley conceptualizó la transformación fractal como un medio para detectar fractales en fotografías digitalizadas. Desarrollo matemático metodológico que culminó con la compresión fractal de imágenes, muy utilizada en multimedia y otras aplicaciones relacionadas con el manejo de imágenes. Barnsley generalizando el método de Hutchinson de semejanzas contractivas, consigue resolver el problema de la compresión de imágenes mediante fractales. La anécdota repara que el primer intento para comprimir una imagen (10000:1), tardó 100 horas en la codificación y alrededor de 30 minutos para la decodificación, además de la guía del proceso por una persona. Posteriormente Barnsley y Alan Sloan efectuaron mejoras en la operatividad del método, culminando en 1992 con el desarrollo del primer algoritmo automático y no rápido propuesto por Arnaud Jacquin, que aplica la transformación fractal en un Sistema de Funciones Iteradas Particionadas (SFIP), sistema que comprime automáticamente la imagen por funciones iteradas. Barnsley y Sloan crearon en 1987 *Iterated Systems Inc.*, inscribiendo alrededor de 20 patentes relacionadas con la compresión fractal para comercializar el compresor/descompresor *Images Incorporated*.

Los métodos de compresión hacen posible que las imágenes en general sean almacenadas en menor espacio sin deteriorar significativamente la información que contienen. Al respecto, *Lossless* método sin pérdida de información, comprime imágenes en el formato GIF de 3 a 1. *Lossy* método con pérdida de información, en su formato JPEG; *Joint Photographic Expert Group* permite una compresión de 25 a 1 sin pérdidas de información sustanciales. La compresión fractal de imágenes pertenece a este último tipo de compresión y es el medio tecnológico actual para tratar imágenes naturales, considerando que las partes de una imagen, por lo general, presentan similitudes con otras partes de la misma imagen. De esta manera, los algoritmos fractales convierten estas partes en datos matemáticos a través de códigos fractales que sirven para almacenar y devolver las imágenes.

Sistema de Funciones Iteradas Particionadas SFIP, imágenes binarias

Comenzando con la representación de una imagen binaria, donde la imagen puede ser descrita como un subconjunto de $\mathbf{R}^2$. Un SFIP es el conjunto de contracciones $f_1, \dots, f_N, f_i: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$

De acuerdo con estas funciones, el SFIP describe un conjunto bidimensional S como el punto fijo del operador de Hutchinson:

$$H(A) = \bigcup_{i=1}^N f_i(A), \quad A \subset \mathbf{R}^2$$

Donde, H es un conjunto operador a conjunto, y S el único conjunto que satisface $H(S) = S$. La idea es construir el *SFIP* donde el conjunto S es la imagen binaria. El conjunto S puede ser recuperado del *SFIP* mediante el método del punto fijo de Banach para asegurar que siempre será posible obtener a partir de H una imagen, y que ésta, será la misma (atractor del sistema): para cualquier conjunto inicial compacto no vacío A_0 , la iteración que converge a S es: $A_{k+1} = H(A_k)$. Además el conjunto S es igual a sí mismo $H(S) = S$. Implicando que la unión de copias es: $S = f_1(S) \cup f_2(S) \cup \dots \cup f_N(S)$. Así, el *SFIP* es una representación fractal de S .

La representación *SFIP* puede ser extendida a una imagen en escala de grises, considerando la gráfica de la imagen como un subconjunto de $\mathbf{R}^3$. Así, para una imagen en escala de grises $u(x,y)$, el conjunto $S = \{(x,y,u(x,y))\}$, al igual que en el caso binario, se describe por un *SFIP* utilizando una serie de contracciones $f_1, \dots, f_N$, pero en $\mathbf{R}^3$, $f_i: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$.

Codificación

La representación fractal de imágenes, tiene una dificultad al elegir la serie de contracciones ($f_1, \dots, f_N$) como punto fijo que se aproxime a la imagen de entrada, y en cómo hacerlo de forma eficiente. Una solución corresponde a: 1) Particionar la imagen en bloques R_i de tamaño $s \times s$. 2) Para cada R_i , buscar en la imagen y encontrar un bloque D_i de tamaño $2s \times 2s$ que sea similar a R_i . 3) Seleccionar las funciones de búsqueda tal que $H(D_i) = R_i$ para cada i . En el segundo paso, es importante encontrar un bloque similar en el que *SFIP* represente fielmente la imagen de entrada, necesitando un número suficiente de bloques opción para D_i . Limitando el número de bloques de búsqueda en relación con el costo computacional y la rapidez. Situación que hace de la codificación fractal sea mucho más lenta que, por ejemplo, la representación de imágenes basadas en la transformada del coseno discreta y en onda.

Características de la Compresión Fractal CF

Con la *CF*, la codificación a nivel computacional es lenta, debido a la búsqueda de similitudes propias. Sin embargo, la decodificación es bastante rápida. Esta desigualdad hace que la compresión fractal no sea usual para aplicaciones en tiempo real, pero cuando las imágenes o figuras son almacenadas por ejemplo en un disco compacto CD la compresión fractal llega a ser más competitiva. En tratamientos comunes la compresión fractal JPEG (relación 50:1) proporciona resultados similares a algoritmos basados en la transformada del coseno discreta. Para relaciones más elevadas de compresión, la *CF* puede ofrecer una calidad superior. En consecuencia, la eficiencia en la *CF* se incrementa con la complejidad de la imagen y la profundidad de color, en comparación con imágenes en escala de grises. Por otra parte la eficacia de un sistema de compresión se mide mediante la razón de compresión: $\text{relación} = \text{núm. de bytes imagen sin comprimir} / \text{núm. de bytes imagen comprimida}$.

Independencia de la resolución, escalado fractal e interpolación

Una característica propia de la compresión fractal es hacer que las imágenes se vuelven independientes de la resolución después de ser convertidas al código fractal. Debido a que el sistema de función iterada *SFIP* en el archivo comprimido se escala indefinidamente. Esta propiedad es conocida como *escalado fractal*. La independencia de la resolución de una imagen codificada en fractal puede utilizarse para incrementar la resolución de una imagen. Este proceso se conoce como *interpolación fractal*. Que lleva la imagen a un código a través de la compresión fractal, y posteriormente se descomprime a una resolución superior. El resultado es una imagen en la que los *SFIP* se han usado como interpolantes que devuelven buenos detalles geométricos, al comparar, con los métodos de interpolación tradicionales bilineal y bicúbica. Sin embargo, las imágenes naturales tienen características que reducen el argumento anterior debido a que éstas, no se obtienen como atractores del *SFIP*. La construcción de modelos fractales con ayuda del teorema del collage puede ser una solución al respecto.

Limitaciones y ventajas de la compresión fractal

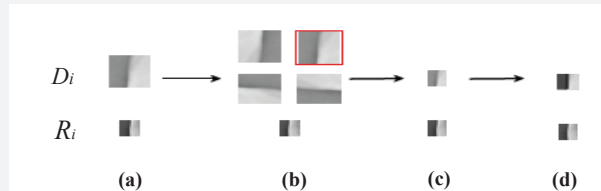
- *Iterated Systems Inc.*, tiene los derechos de propiedad intelectual del método *CF-SFIP*. Sin embargo, la empresa brinda apoyo a través de Internet [7] para que esta tecnología sea utilizada como un estándar.
- El escalado (zoom) sin pixelización (súper posición de píxeles) al ser independiente de la resolución se considera una forma especial de interpolación, debido a que no genera aparición de bloques ampliados.
- La *CF-SFIP* utiliza mayor tiempo para su desarrollo asistido por computadora. No así la descompresión que es más rápida.
- La reducción de espacio que proporciona la *CF-SFIP* es útil principalmente en transmisiones de imágenes a través de Internet en menor tiempo y costo.

Proceso de compresión y descompresión, simplificado:

La imagen se divide en cuatro celdas rango R_i , y al mismo tiempo una base de celdas de dominio D_i , esta base debe ser muy grande por lo que se divide la celda rango R_i en varios dominios de distintos tamaños, para encontrar una D_i que cubra a una celda rango dada.



El algoritmo busca en la base de celdas dominio y encuentra un D_i que se relaciona adecuadamente con R_i .

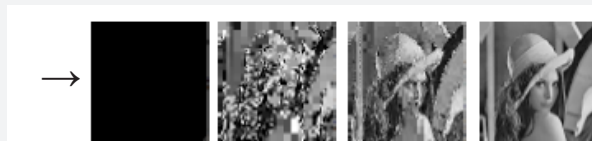


Búsqueda y comparación: (a) Celdas rango y dominio a comparar. (b) Rotación y reflejo de D_i en cualquiera de las ocho formas cubriendo 90° escogiendo el mejor movimiento. (c) Compresión de D_i para que coincida con el tamaño de R_i . (d) se ajusta brillo y contraste mediante mínimos cuadrados para obtener valores óptimos.

	índice quadtree	rot.	dom.	contraste	brillo	
	1 1 1 1 0 0	5	214	-0.972271	143.701	R_1
	1 1 1 2 1 0	1	1025	-0.181081	155.425	R_2
	1 1 1 2 2 0	6	1000	0.128092	118.402	R_3
	1 1 1 2 3 1	6	906	-0.6473713	238.301	R_4
	1 1 1 2 3 2	6	708	-0.997927	224.18	R_5

Codificación: se escribe un renglón por cada celda rango cubierta. En cada renglón se escribe el índice *quadtree* (primeras seis columnas), el índice de rotación, el índice de celda dominio, el valor del contraste y el valor del brillo.

Decodificado: Imagen base cuadrado negro, posteriormente por acción de las iteraciones van apareciendo *atractores*, que por el teorema del collage aumentarán el parecido con la imagen inicial.



El **proceso de descompresión** comprende *iterar* (repetir) un número suficiente de veces todas las transformaciones afines almacenadas sobre las regiones de rango hasta llegar a un conjunto invariante, el *atractor*, que es una buena aproximación de la imagen original (al tratarse de una compresión con pérdidas, nunca será una réplica *pixel a pixel* de la original) pero es altamente representativa. (*pixel* = Superficie homogénea más pequeña de las que componen una imagen, se define por su brillo y color).

Bibliografía de referencia:

1. De Guzmán, O.M., et-al, 1993 Estructuras fractales, Ed. Labor, Madrid - España, PDF Compresión fractal 2014
2. <http://es.wikipedia.org/wiki/Compresión%20fractal?oldid=79577684>,
3. Lamas, R.J., Fernández, G. M., Compresión de fractales, ventajas y desventajas sabria.tic.udc.es/gc/.../trabajos/.../compresión%20fractal/trabajo.html. Consulta: 23/10/14,
4. Kolman, B., David, R., 2006, books google. com bo. Álgebra lineal, Introducción a los fractales. Consulta: 23/10/14.
5. Pérez, B. S., 2006, PDF, Compresión fractal de imágenes, Facultad de Ciencias UNAM, México,
6. Smooth fractal interpolation Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, Campus Plaza de San Francisco, Zaragoza - España.
7. <https://www.crunchbase.com/organization/iterated-systems-inc>.