APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL (PL) EN INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES – ALGORITMO SIMPLEX (AS)

(Cuatro ejemplos relacionados con la optimización de funciones y la asignación de variables implicadas)

APPLICATIONS OF LINEAR PROGRAMMING (LP) IN OPERATIONS RESEARCH – SIMPLEX ALGORITHM (SA)
(Four examples related to optimization of functions and assignment of variables involved)

Erick C. Grudner Carranza*

RESUMEN

Este artículo de divulgación de la programación lineal (PL); busca recrear los alcances e importancia del algoritmo simplex (AS) en la investigación de operaciones y la toma de decisiones estratégicas. Presentando primero los fundamentos matemáticos del (AS), y a continuación aplicándolos, en cuatro ejemplos relacionados con la optimización de funciones objetivo y asignación de las variables implicadas, resaltando su objeto común de estudio, los criterios para su desarrollo e inclusión de variables auxiliares según los signos que definen las inecuaciones (restricciones) de programas lineales: primales, duales, paramétricos y enteros.

PALABRAS CLAVE: Optimización lineal, programación lineal, algoritmo Dantzig-Kantoróvich (simplex), función objetivo, asignación óptima de variables, investigación de operaciones, maximización, minimización.

ABSTRACT

This linear programming (LP) popularization article; seeks to recreate the scope and importance of the simplex algorithm (SA) in operations research and strategic decision making. Presenting first, the mathematical foundations of the (SA), and then applying them, in four examples related to the optimization of objective functions and assignment of the variables involved, highlighting their common object of study, the criteria for their development and inclusion of variables auxiliaries according to the signs that define the inequalities (restrictions) of linear programs: primal, dual, parametric and interger.

KEYWORDS: Lineal optimization, linear programming, Dantzig-Kantoróvich algorithm (simplex), objective function, optimal assignment of variables, operations research, maximization, minimization.

RESUMO

Este artigo de popularização de programação linear (LP); busca recriar o escopo e a importância do algoritmo simplex (AS) na pesquisa operacional e na tomada de decisões estratégicas. Apresentando primeiro, os fundamentos matemáticos do (AS), e depois aplicando-os, em quatro exemplos relacionados à otimização de funções objetivo e atribuição das variáveis envolvidas, destacando seu objeto comum de estudo, os critérios para seu desenvolvimento e inclusão de variáveis auxiliares de acordo com os sinais que definem as desigualdades (restrições) de programas lineares: primal, dual, paramétrico e inteiro.

PALAVRAS-CHAVE: Otimização linear, programação linear, Algoritmo Dantzig-Kantoróvich (simplex), função objetivo, designação ótima de variáveis, investigação de operações, maximização, minimização.

History of the article: Received 07/10/2021. Style review 14/10/2021. Accepted 28/10/2021.

INTRODUCCIÓN

Optimización[1], marco conceptual

De modo explícito o implícito la optimización como parte de las actividades humanas, sean éstas personales o laborales, busca encontrar ese algo que no puede ser mejor. Esto significa encontrar lo óptimo (superlativo de bueno) desde el punto de vista del objetivo planteado.

En consecuencia, frente a la variedad real de problemas referidos especialmente con la distribución de recursos limitados de los factores de producción (trabajo, capital, materias primas), el análisis de productividad de los procesos de producción, la toma de decisiones sobre aspectos cuantitativos y cualitativos de la administración empresarial (investigación de operaciones), y el diseño de objetos complejos [1]. La optimización o programación matemática como un campo de estudio de la matemática pura y aplicada, proporciona los métodos generales para solucionar estos problemas, estableciendo inicialmente el enunciado del problema que interesa resolver en términos matemáticos considerando estimaciones cuantitativas a las posibles variantes, evaluadas desde la perspectiva discriminante de un valor mínimo o máximo de la función objetivo[2].

Por lo tanto, el planteamiento del problema y los métodos de investigación para lograr la optimización dependen tanto de las propiedades de la función objetivo como de la información disponible al respecto. Simplificándose la solución del problema, cuando la función objetivo se expresa mediante una fórmula o un polinomio de grado mayor a uno y es derivable, condición que permite analizar las propiedades de la función, determinar la dirección de su crecimiento o decrecimiento y buscar los puntos extremos (máximos y mínimos) [1]. Separándose de este método general de optimización, la programación lineal (LP), que a través de algoritmos especiales soluciona funciones objetivo multivariable de grado uno.

Programación lineal (PL)

Expresa en términos matemáticos un problema real y sobre éste, modela un procedimiento analítico para encontrar ya sea el valor máximo[3] o el mínimo[4] de una cantidad específica denominada función objetivo, la cual depende de un número finito de variables de entrada independientes entre sí, o relacionadas a través de una o más restricciones que se expresan por medio de una serie de inecuaciones[5] y ecuaciones lineales (grado uno) que resueltas proporcionan una solución posible dentro de ese espacio restringido de valores que acompañan a estas variables [3]. La función objetivo puede maximizarse o minimizarse resolviendo analíticamente simples sistemas algebraicos de inecuaciones y ecuaciones lineales o por su representación gráfica. Para los casos donde se presentan un mayor número de variables y restricciones, se utiliza el algoritmo de Dantzig denominado método del algoritmo simplex (SA). Procedimiento algorítmico de balanceo (pivote) muy recurrente para abordar problemas de investigación operativa[6] en general.

[1] Acción y efecto de optimizar (buscar la mejor manera para realizar una actividad),

[2] También denominado criterio de calidad.

[3] Límite superior o extremo al que puede llegar algo. (DRAE).

[4] Límite inferior o extremo al que se puede reducir algo. (DRAE).

[5] Desigualdad algebraica que separa sus términos (incógnitas e independientes) ya no por el signo (=), y lo hace más bien por los signos (<) menor que, (>) mayor que, (≤) menor o igual que, (≥) mayor o igual que. Se le atribuye al matemático húngaro Gyula Farkas (1902). el método para resolver sistemas de inecuaciones con múltiples soluciones https://hmong.es >Farkas´_lemma

[6] Parte de la ciencia administrativa soportada por métodos matemáticos de análisis sobre modelado, inferencia estadística y principalmente optimización que contribuyen con información para elegir una mejor toma de decisiones al momento de ejecutar determinada actividad productiva, de administración o de gestión. [2]

Consecuentemente en este artículo de divulgación de la programación lineal (PL); se busca recrear los alcances e importancia del algoritmo simplex (SA) en la investigación de operaciones y la toma de decisiones estratégicas. Presentando brevemente los fundamentos matemáticos del algoritmo simplex (SA), y a continuación aplicándolos, en cuatro ejemplos relacionados con la optimización de funciones objetivo y asignación de las variables implicadas, resaltando su objeto común de estudio, los criterios para su desarrollo e inclusión de variables auxiliares según los signos que definen las inecuaciones (restricciones) de programas lineales: primales, duales, paramétricos y enteros.

DESARROLLO

Algoritmo de Dantzig[7], (algoritmo simplex SA)

Procedimiento matricial iterativo de programación lineal; suficiente para dar solución a problemas con un mayor número de variables y de restricciones representadas por un sistema de inecuaciones o desigualdades que definen a un poliedro como el espacio geométrico factible por donde avanzando sucesivamente desde uno de sus vértices[8], se puede llegar a otro de los vértices, dónde está la solución óptima que maximiza o minimiza la función objetivo [3].

Representación estándar del algoritmo simplex (SA)

En su forma matricial estándar (SA) reúne la función objetivo ha optimizar, las restricciones y la condición que todas las variables sean positivas (mayores a cero):

$$\text{Optimícese: } z = C^{\tau}X \quad \text{para } X \geq 0$$

$$\text{Con la condición: } AX = B$$

$(B \geq 0)$, representa la solución factible iniciando desde (X_0).

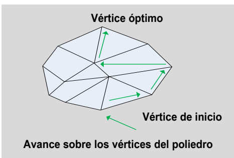
El método simplex para los programas de optimización recurre a la construcción de una tabla especial (tableau), figura 1. En la cual (C_0) corresponde al vector costo, asociado con las variables en (X_0).

	X^{τ}, C^{τ}	
X_0, C_0	A	B
	$C^{\tau} - C_0^{\tau}A$	$-C_0^{\tau}A$

Fuente: Elaboración propia sobre información de [3], [4]

Figura 1: Tabla especial (tableaux)

[7] Propuesto por el matemático norteamericano Bernard George Dantzig en 1947, fue elegido como uno de los diez algoritmos más importantes del siglo XX que influyeron en el desarrollo de la ciencia y tecnología [mbrjournal.com › 2021/01/26 › george-bernard-dantzig The Pioneer of Linear Optimization]. Sin embargo, en 1939 un algoritmo similar de programación lineal, orientado hacia la maximización de la productividad, las materias primas y el trabajo, fue propuesto por el economista y matemático ruso Leonid Vitaliévich Kantoróvich, que en 1975 compartió con el economista de origen holandés Tjalling C. Koopmans el premio Nobel de economía por sus investigaciones sobre la asignación óptima de recursos escasos. El resultado de ambos algoritmos, expresado en el algoritmo simplex, actualmente sirve para solucionar problemas de investigación operativa de (m) restricciones y (n) variables. [http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1975/kantorovich-autobio.html]



[8] [https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Algoritmo_símplex&oldid=140626542]

Construcción de tablas e iteración simplex

Sea el siguiente problema de programación lineal (LP) donde se quiere maximizar la función objetivo z (Ec.1):

$$\textit{Maximizar } z = x_1 + 6x_2 + x_3 \qquad \text{Ec.1}$$

Bajo las restricciones (Inec. 2 y 3):

$$\textit{Restricciones: } x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9 \qquad \text{(Inec. 2)}$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15 \qquad \text{(Inec. 3)}$$

Considerando que todas las variables son positivas:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Fuente: Elaboración propia sobre datos problema propuesto en [5]

Examinando el programa lineal de maximización, la función objetivo involucra a tres variables (x_1, x_2, x_3) y las restricciones incluyen dos desigualdades de la forma **(≤)** menor o igual que, para convertirlas en ecuaciones, requieren incorporar dos slacks variables (variables de holgura (s_4, s_5) de coeficientes cero para la función objetivo y uno respectivamente para la matriz (A).

$$x_1 + 6x_2 + x_3 + 0s_4 + 0s_5 - z = 0 \qquad \text{(Ec. 4)}$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_4 = 9 \qquad \text{(Ec. 5)}$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_5 = 15 \qquad \text{(Ec. 6)}$$

Relacionando la tableaux (figura 1) con los coeficientes de estas ecuaciones, se tiene el detalle siguiente:

$$\textit{Conjunto de vectores } X^{\tau} \equiv [\, x_1, x_2, x_3, s_4, a_5 \,]$$

$$\textit{Conjunto de vectores función objetivo}$$

$$C^{\tau} \equiv [\; 1, 6, 1, 0, 0 \;]$$

$$\textit{Matriz de restricciones } A \equiv \begin{bmatrix} 1, 2, 3, 1, 0 \\ 3, 2, 2, 0, 1 \end{bmatrix}$$

$$\textit{Matriz restricciones } B \equiv \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\textit{Matriz de inicio } X_0 \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\textit{Conjunto de vectores,}$$
$$\textit{Costo variables de holgura } C_0^{\tau} \equiv [0, 0]$$

Ref.: (≡) Equivalencia (igual valor que)

	X^{τ}	x_1	x_2	x_3	s_4	s_5	
	C^{τ}	1	6	1	0	0	
X_0	C_0			A			B
0	s_4	1	2	3	1	0	9
0	s_5	3	2	2	0	1	15
				$C^{\tau} - C_0^{\tau}A$			$-C_0^{\tau}A$
	z_j	1	6	1	0	0	0

Efectuando el producto interno para las matrices:

$$-C_0^{\tau}A = [0,0] \times \begin{bmatrix} 1\,2\,3\,1\,0 \\ 3\,2\,2\,0\,1 \end{bmatrix} = 0, 0, 0, 0, 0$$

$$C^{\tau} - C_0^{\tau}A = [\; 1\,6\,1\,0\,0 \;] - 0 = 1, 6, 1, 0, 0$$

Fuente: Elaboración propia sobre datos problema propuesto en [5]

En la tableaux 1, se muestra el traslado de estos datos en un formato de tabla común, considerando también el cambio de signo fila (z_j) para la opción maximizar. A partir de esta tableaux es posible aplicar el algoritmo simplex, identificando inicialmente la columna (C_b) y luego la fila de balanceo (R_f) (column and row pivot):

Tableaux 1	x_1	x_2	x_3	s_4	s_5	B
s_4	1	2	3	1	0	9
s_5	3	2	2	0	1	15
z_j	-1	-6	-1	0	0	0

Para la columna de balanceo (C_b), se examina aquella con el valor negativo z_j más extremo; y para la fila de balanceo (R_f) se elige el cociente (B/*casilla* C_b) menor, tableaux 2:

Tableaux 2 — C_{b1}

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
R_{f1}	$9/2 = 4{,}5$	s_4	1	2	3	1	0	9
	$15/2 = 7{,}5$	s_5	3	2	2	0	1	15
		z_j	-1	-6	-1	0	0	0

Elegida la fila de balanceo (R_f) se cambia la variable de la columna de balanceo por la variable de la fila marcada por el cociente menor, las casillas de la columna de balanceo se convierten en uno (fila de balanceo) y ceros para las otras filas [4], [5]. Las operaciones correspondientes para este caso se muestran en la tableaux 3:

Tableaux 3 — C_{b1}

Operaciones				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
$(1/2)R_{f1}$	R_{f1}	4,5	x_2	1/2	1	3/2	1/2	0	9/2
$(-2)\,R_{f1} + R_{f2}$			s_5	2	0	-1	-1	1	6
$(6)\,R_{f1} + R_{f3}$			z_j	2	0	8	3	0	27

Operaciones sobre la tabla 1:

$$f_1' = [(1/2)\,f_1];\;\; f_2' = [(-2)\,f_1' + f_2];\; f_3' = [(6)\,f_1' + f_3]$$

De esta forma el algoritmo continua iterando valores hasta llegar a la condición de parada (stop condición, cambio de signos en la fila z_j) [4]. Al respecto en la tableaux 3 se observa que la fila (z_j) ya no tiene valores con signo negativo. En consecuencia, el algoritmo ha llegado a la condición de parada, determinando los siguientes valores para la maximización de esta función objetivo:

$$z = 6x_2 = 27,\ \text{variables}\ x_1 = x_3 = 0,\ x_2 = (9/2) = 4{,}5\ \text{y}\ s_5 = 6$$

Remplazando el valor de x_2 y el valor de s_5 en la ecuación 6, se tiene que:

$$2(4{,}5) + 6 = 15$$

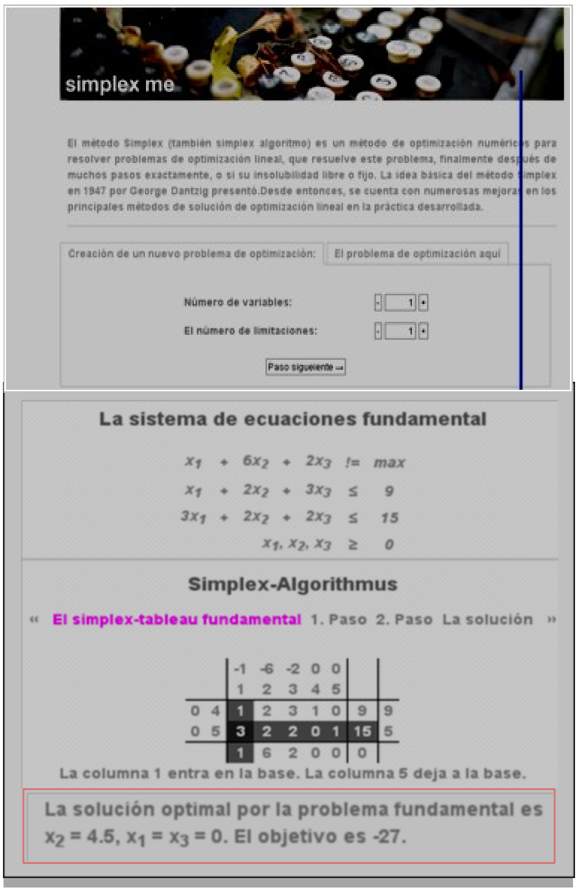
La variable slack o de holgura indica que la inecuación 3 incorpora un excedente de seis.

Asistencia computacional para aplicar el algoritmo simplex (SA)

El algoritmo simplex a partir de sus primeras aplicaciones en la década de los cuarenta (siglo XX) ha requerido de sistemas de cálculo que agilicen los tiempos de iteración hasta llegar a los resultados. Más aún, sí en los problemas de programación lineal el número de variables y restricciones es demasiado grande. Al respecto la computación ha extendido grandemente sus posibilidades tanto en software como en hardware para ofrecer a los usuarios aplicaciones que resuelven simples y complejos programas lineales de optimización.

Al presente estas aplicaciones también son parte de los catálogos de calculadoras manuales[9]. Igualmente a través de Internet[10], es posible acceder a páginas web que ofrecen la resolución en tiempo real de programas lineales de maximización o minimización, entregando los resultados y adicionalmente un auxiliar de los cálculos efectuados.

Para el caso del programa lineal presentado en los parágrafos anteriores como modelo. Visitando las páginas [6] www.simplexme.com y [7] www.phpsimplex.com, en ambas, el primer paso corresponde a determinar el número de variables y restricciones; ingresados estos datos, el programa abre una matriz para incluir los coeficientes tanto para la función objetivo, y los coeficientes de las restricciones, además de las opciones del programa (maximizar o minimizar). Continuando aparece de inmediato la solución y al mismo tiempo cierta información adicional, ver screenshot editado (figura 2).



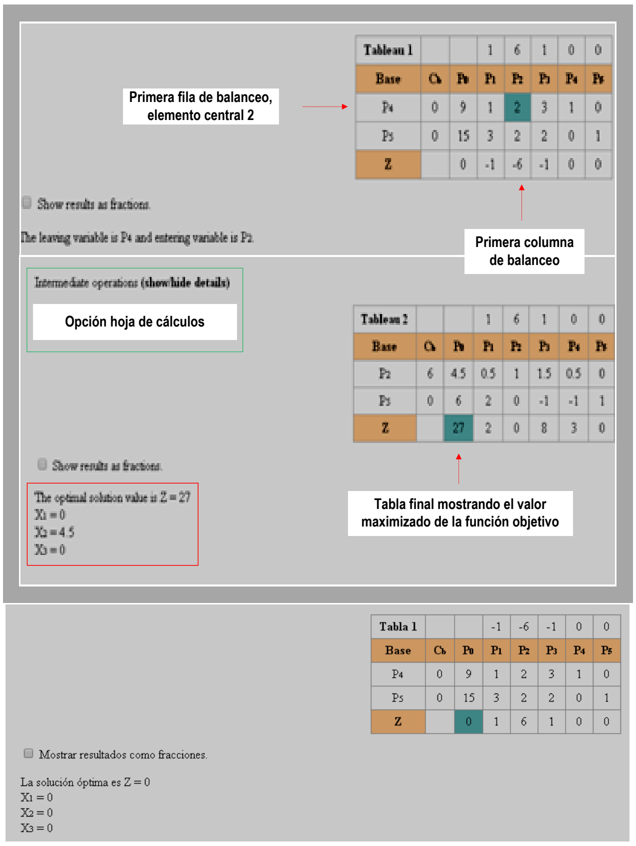
Fuente: [6]

Figura 2: Solución (LP) modelo, pasos seguidos (2), cambio de variables de columna a fila, según aplicación simplexme.

De similar forma en la aplicación PHPsimplex, ingresando los datos y continuando el proceso algorítmico simplex, la conclusión se muestra en el screenshot editado de la figura 3. Si bien en ambas aplicaciones el diseño de la tabla inicial difiere significativamente, los resultados convergen hacia la única solución posible de este programa lineal de maximización, coincidente con los resultados obtenidos al desarrollar el algoritmo simplex para el modelo (Ec. 1 e Inecs. 2 y 3).

[9] Hewelt Packard HP-48, HP- 50, Casio 9860 incorporan en su menú (PL) simplex.

[10] Conjunto descentralizado de puntos de comunicación que se interconectan a través de la geografía mundial. Ofrece además de otros servicios (telefonía, correo electrónico) la consulta remota de archivos en hipertexto a través de grupos de protocolo WWW (World Wide Web) comúnmente páginas Web.



Fuente: [7]

Figura 3: Solución (LP) modelo, cambio de variables de columna, opción vista de cálculos efectuados, y finalmente el resultado según aplicación phpsimplex.com.

Inclusión de variables según el signo de la inecuación

El algoritmo simplex de acuerdo con el signo que tienen las inecuaciones propuestas en el programa lineal, necesita determinadas variables artificiales según el signo de las restricción [4], así el tipo de variable a incluir corresponde a

SIGNO DE LAS RESTRICCIONES	INCLUIR
Menor o igual (≤)	Variables de holgura (s)
Igual (=)	Variables artificiales (R)
Mayor o igual (≥)	Variables artificiales (R) y variables de exceso (e) signo negativo

Primer ejemplo:

Restricciones con signo menor o igual (≤). Asignación óptima de recursos en procesos de producción:

En una empresa de la ciudad de la Paz dedicada a la comercialización de café torrado en bolsas de uno, medio y cuarto kilo; se buscó maximizar el costo del proceso de envasado en relación con el número de bolsas según el peso de café, considerándose las siguientes variables:

1. Cantidad diaria total de café torrado a envasar,
2. Tiempo mínimo de llenado según el peso,
3. Pérdidas en el llenado de las bolsas según el peso (Ineficiencia de llenado),
4. Total bolsas producidas por día.

Esta información se representa con el siguiente programa lineal de aplicación algoritmo simplex PLAS:

$$Maximizar\ z = 14x_1 + 16x_2 + 20x_3$$

Restricciones:

Cantidad diaria total de café torrado a envasar

$$0{,}25x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 \leq 750 \quad \text{(Inec. 4)}$$

Tiempo mínimo de llenado según el peso

$$0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}4x_3 \leq 450 \quad \text{(Inec. 5)}$$

Pérdidas llenado de las bolsas según el peso (Ineficiencia en el llenado)

$$0{,}05x_1 + 0{,}04x_2 + 0{,}03x_3 \leq 77{,}5 \quad \text{(Inec. 6)}$$

Total bolsas producidas por día

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1800 \quad \text{(Inec. 7)}$$

Considerando que todas las variables son positivas:

$$x_1, x_2, x_3, s_4, s_5, s_6, s_7 \geq 0$$

Fuente: Elaboración propia

Cambio desigualdades a ecuaciones incluyendo variables de holgura:

$$0{,}25x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 + s_4 = 750 \quad \text{(Ec. 7)}$$

$$0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}4x_3 + s_5 = 450 \quad \text{(Ec. 8)}$$

$$0{,}05x_1 + 0{,}04x_2 + 0{,}03x_3 + s_6 = 77{,}5 \quad \text{(Ec. 9)}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + s_7 = 1800 \quad \text{(Ec.10)}$$

$$z = 14x_1 + 16x_2 + 20x_3 + 0s_4 + 0s_5 + 0s_6 + 0s_7 \quad \text{(Ec.11)}$$

Soluciones

Para optimizar este programa por el método algebraico de solución de ecuaciones lineales se condicionarían de acuerdo con el cálculo combinatorio 35 posibles soluciones que resultan de aplicar la fórmula combinatoria:

$$s = v! / [e!\ (v-e)!]$$

s = número de soluciones, v = número de variable, e = número de ecuaciones y ! = factorial del número

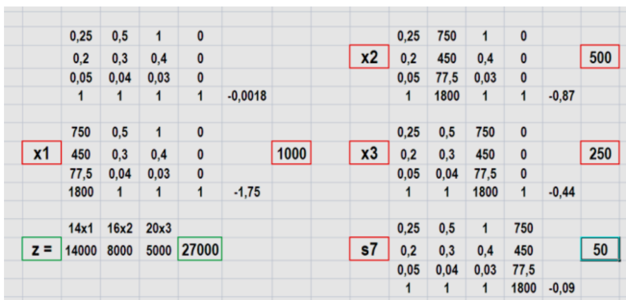
$$si\ v = 7,\ e = 4,\ \ s = 7!/\ 4!\ (7-4)!\ ,\ s = 7!/\ 4!\ (3)!$$

$$s = [(7)(6)(5)4!] / [(4)!(3)!] = [(7)(6)(5)] / [(3)!]$$

$$[(7)(6)(5)] / [(3)(2)(1)] = 210/6 = 35$$

Admitiendo para la solución por lo menos (7−4) = 3 tres ceros y la resolución de 35 matrices combinatorias 4x4.

De estas 35 iteraciones. El óptimo pertenece al siguiente desarrollo matricial, seleccionado variables (x_1, x_2, x_3, s_7):



Fuente: Desarrollo matricial propio, captura de pantalla hoja Excel

Solución aplicando algoritmo simplex

Tabla simplex de inicio, efectuando por convención el cambio de signo para los coeficientes de las variables función objetivo, además otorgando la unidad para cada variable de holgura (s) en la matriz A[11].

Tabla 1				c1					
	z	x_1	x_2	x_3	s_4	s_5	s_6	s_7	B
z	0	-14	-16	-20	0	0	0	0	0
s_4	0	0,25	0,5	1	1	0	0	0	750
s_5	0	0,2	0,3	0,4	0	1	0	0	450
s_6	0	0,05	0,04	0,03	0	0	1	0	77,5
s_7	0	1	1	1	0	0	0	1	1800

Operaciones	Tabla 1									
		z	x_1	x_2	x_3	s_4	s_5	s_6	s_7	Sol.
(20)f2+f1	z	0	-14	-16	-20	0	0	0	0	0
f2	s_4	0	0,25	0,5	1	1	0	0	0	750
(-0,4)f2+f3	s_5	0	0,2	0,3	0,4	0	1	0	0	450
(-0,03)f2+f4	s_6	0	0,05	0,04	0,03	0	0	1	0	77,5
(-1)f2+f5	s_7	0	1	1	1	0	0	0	1	1800

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel

Primera columna de balanceo, se elige la que contiene el valor negativo más extremo (z), columna x_3. Para la fila de balanceo según el criterio discriminante menor cociente (Sol./Casilla columna de balanceo 750, 1125. 2583,3 y 1800), determina que es la fila 2. Por lo tanto la tabla 1 puede representarse de la siguiente manera. En el extremo izquierdo de la tabla se incluyen las operaciones que permiten convertir la casilla de intersección (fila-columna) a la unidad y las otras casillas de la misma columna a cero). Para la tabla 1 la intersección es igual a la unidad; por lo tanto, no requiere.

La iteración del algoritmo, efectuando las operaciones correspondientes proporciona la tabla 2. Seleccionando la columna x_1 como la del valor negativo más extremo y la fila de balanceo f_4, correspondiendo la intersección a 0,0425. Cifra que ahora sirve para su conversión a la unidad, desarrollando el producto por su recíproco (1/0,0425). Afectando además a toda la fila y cambio en las operaciones.

		Tabla 2										
			z	x_1	x_2	x_3	s_4	s_5	s_6	s_7	Sol.
(9)f4+f1		z	0	-9	-6	0	20	0	0	0	15000
(-0,25)f4+f2		x_3	0	0,25	0,5	1	1	0	0	0	750
(-0,1)f4+f3		s_5	0	0,1	0,1	0	-0,4	1	0	0	150
(1/f4)f4	fb4	x_1	0	0,0425	0,025	0	-0,03	0	1	0	55
(-0,75)f4+f5		s_7	0	0,75	0,5	0	-1	0	0	1	1050

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel

La ejemplificación permite calcular la nueva fila f_1 tabla 3.

		Tabla 2											
			z	x1	x2	x3	s4	s5	s6	s7	sol	K-ésimo menor	
		z	0	-9	-6	0	20	0	0	0	15000	-9	
		x3	0	0,25	0,5	1	1	0	0	0	750	Columna	
		s5	0	0,1	0,1	0	-0,4	1	0	0	150		
f_4		x1	0	0,0425	0,025	0	-0,03	0	1	0	55		K-ésimo menor
		s7	0	0,75	0,5	0	-1	0	0	1	1050		55
													Fila
f_2		Reciproco	0	0,0425	0,025	0	-0,03	0	1	0	55		
	0,0425	23,5294	0	1	0,58824	0	-0,7058824	0	23,5294	0	1294,12	Producto	
		Cambio de signo											
f_1	-9	9 $\rightarrow$	0	1	0,58824	0	-0,7058824	0	23,5294	0	1294,12		
			0	9	5,29412	0	-6,3529412	0	211,765	0	11647,1	Producto	
	f_1		0	-9	-6	0	20	0	0	0	15000	Adición	
Fila modificada		f_1´	0	0	-0,7059	0	13,647059	0	211,765	0	26647,1		

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel

Prosiguiendo con las operaciones para las demás filas y columnas el resultado se muestra en la tabla 3.

		Tabla 3									
			z	x_1	x_2	x_3	s_4	s_5	s_6	s_7	Sol.
(0,7059)f3+f1		z	0	0	-0,7059	0	13,6471	0	211,76	0	26647
(-0,3529)f3+f2		x_3	0	0	0,3529	1	1,17647	0	-5,8824	0	426,47
(1/f3)f3	fb3	x_2	0	0	0,0412	0	-0,32941	1	-2,3529	0	20,588
(-0,5882)f3+f4		x_1	0	1	0,5882	0	-0,70588	0	23,529	0	1294,1
(-0,0588)f4+f5		s_7	0	0	0,0588	0	-0,47059	0	-17,647	1	79,412

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel

Existiendo todavía un valor negativo extremo, la iteración prosigue efectuando las operaciones correspondientes y el cambio en la columna x_2, para finalmente determinar la condición de parada (tabla 4[12]) que además incluye la solución al programa lineal propuesto en el ejemplo uno.

Tabla 4									
	z	x_1	x_2	x_3	s_4	s_5	s_6	s_7	Sol.
z	0	0	0	0	8	17,14286	171,43	0	27000
x_3	0	0	0	1	4	-8,571429	14,286	0	250
x_2	0	0	1	0	-8	24,28571	-57,143	0	500
x_1	0	1	0	0	4	-14,28571	57,143	0	1000
s_7	0	0	0	0	4,4E-16	-1,428571	-14,286	1	50

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel

Solución utilizando la aplicación PHPsimplex

La siguiente captura de pantalla, corresponde al resultado obtenido recurriendo a la aplicación PHPsimplex, que es igual al conseguido a través de la aplicación explicativa Excel y del método algebraico. Diferenciándose notablemente por el tiempo transcurrido para la entrega del resultado.

Tabla 4			14	16	20	0	0	0	0
Base	C_b	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_3	20	250	0	0	1	4	-8.5714285714286	14.285714285714	0
P_2	16	500	0	1	0	-8	24.285714285714	-57.142857142857	0
P_1	14	1000	1	0	0	4	-14.285714285714	57.142857142857	0
P_7	0	50	0	0	0	4.4408920985006E-16	-1.4285714285714	-14.285714285714	1
Z		27000	0	0	0	8	17.142857142857	171.42857142857	0

La solución óptima es Z = 27000
$X_1 = 1000$
$X_2 = 500$
$X_3 = 250$

Fuente: [7]

Análisis de los resultados problema uno

Asignadas las variables para este proceso productivo proporciona la siguiente información:

- Capacidad de envasado limitante 750 Kg, distribuida así; 1000 bolsas de 0,25 Kg, 500 bolsas de 0,5 Kg y 250 bolsas de 1Kg.
- Estableciendo además que el tiempo de llenado y la pérdida de producto por peso, también son variables limitantes que pueden servir para controlar el proceso diariamente.
- Total diario de bolsas producidas de acuerdo con 750 Kg de café torrado y las restricciones (tiempo de embolsado y perdidas), Que corresponde al total real de 1750 a diferencia del valor estimado de 1800, (slack variable, s_7 = 50).
- Mezcla productiva de café (0,25 - 0,5 – 1)Kg maximizada con un valor de 27000 unidades monetarias.

---

[11]
$$A = \begin{matrix} -14 & -16 & -20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,04 & 0,03 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

[12] El procedimiento iterativo desarrollado en Excel utilizó 405 operaciones (productos, cocientes y sumas).

Información útil para la toma de decisiones que mantenga estas variables o pueda utilizarlas para replantear la función objetivo y/o sus restricciones. Bajo este enfoque de programación paramétrica y análisis de sensibilidad [8], [9]. [10], [11], [12] Efectuando modificaciones para el proceso de envasado relacionadas con un aumento en la cantidad de café a envasar diariamente del 33,33 porciento y reduciendo las pérdidas hasta un 32 porciento. Manteniendo invariable los coeficientes de la función objetivo (costos de producción). La nueva programación lineal establece lo siguiente:

$$0{,}25x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 + s_4 = 1000 \qquad \text{(Ec. 12)}$$

$$0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 + s_5 = 450 \qquad \text{(Ec. 13)}$$

$$0{,}03x_1 + 0{,}025x_2 + 0{,}02x_3 + s_6 = 53 \qquad \text{(Ec. 14)}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + s_7 = 2000 \qquad \text{(Ec.10)}$$

$$z = 14x_1 + 16x_2 + 20x_3 + 0s_4 + 0s_5 + 0s_6 + 0s_7 \qquad \text{(Ec.15)}$$

Desarrollando el algoritmo simplex hoja Excel (ver tablas 5 a 8), y la confirmación a través de la aplicación PHPsimpex, se tiene lo siguiente:

Tabla 5	z	x1	x2	x3	s4	s5	s6	s7	Sol.
z	0	-14	-16	-20	0	0	0	0	0
s4	0	0,25	0,5	1	1	0	0	0	1000
s5	0	0,2	0,2	0,3	0	1	0	0	450
s6	0	0,03	0,025	0,02	0	0	1	0	53
s7	0	1	1	1	0	0	0	1	2000

		Tabla 6	z	x1	x2	x3	s4	s5	s6	s7	Sol.
(9)f3+f1		z	0	-9	-6	0	20	0	0	0	20000
(-0,25)f3+f2		x3	0	0,25	0,5	1	1	0	0	0	1000
(1/f3)f3	fb3	x1	0	0,125	0,05	0	-0,3	1	0	0	150
(-0,025)f3+f4		x1	0	0,025	0,015	0	-0,02	0	1	0	33
(-0,75)f3+f5		s7	0	0,15	0,5	0	-1	0	0	1	1000

		Tabla 7	z	x1	x2	x3	s4	s5	s6	s7	Sol.
(2,4)f5+f1		z	0	0	-2,4	0	-1,6	72	0	0	30800
(-0,4)f5+f2		x3	0	0	0,4	1	1,6	-2	0	0	700
(-0,4)f5+f3		x1	0	1	0,4	0	-2,4	8	0	0	1200
(-0,005)f5+f4		s6	0	0	0,005	0	0,04	-0,2	1	0	3
(1/fb5)f5	fb5	x2	0	0	0,2	0	0,8	-6	0	1	100

Tabla 8	z	X1	X2	X3	S4	S5	S6	S7	Sol.
z	0	0	0	0	8	0	0	12	32000
X3	0	0	0	1	0	10	0	-2	500
X1	0	1	0	0	-4	20	0	0	1000
S6	0	0	0	0	0,02	-0,05	1	-0,03	0,5
X2	0	0	1	0	4	-30	0	5	500

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel

Tableau 4			14	16	20	0	0	0	0
Base	Cb	P0	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
P3	20	500	0	0	1	-2.2204460492503E-16	10	0	-2
P1	14	1000	1	0	0	-4	20	0	-2
P6	0	0.5	0	0	0	0.02	-0.05	1	-0.025
P2	16	500	0	1	0	4	-30	0	5
Z		32000	0	0	0	8	1.4210854715202E-14	0	12

The optimal solution value is Z = 32000
X1 = 1000
X2 = 500
X3 = 500

Fuente: [7]

El nuevo resultado establece lo siguiente:

- Capacidad de envasado limitante 1000 Kg, distribuida así; 1000 bolsas de 0,25 Kg, 500 bolsas de 0,5 Kg y 500 bolsas de 1Kg.
- Las modificaciones en los coeficientes para el tiempo de llenado y la pérdida de producto por peso, mejoran el rendimiento de envasado (250 bolsas más peso 1Kg).
- Bajo estas condiciones ahora la variable de holgura es (slack variable, s_6 = 0,5). Variables que puede reducirse aun más para mejorar el rendimiento de envasado.
- Mezcla productiva (0,25 ‑ 0,5 ‑ 1) Kg maximizada con un valor de 32000 unidades monetarias. Incremento del 19 porciento manteniendo los costos de producción invariables[13] y aumentando notablemente el envasado de bolsas con peso de 1 Kg.

Segundo ejemplo:

Restricciones signos igual (=), menor o igual (≤), mayor o igual (≥), Asignación óptima de recursos para mezclas de materia prima con diferentes características de calidad:

Una empresa beneficiadora de minerales de plata en la ciudad de Potosí – Bolivia, recibe de tres minas aledañas minerales de plata (Ag_2S argentita) de baja ley mezclado con (galena PbS) y esfarelita (sulfuro de plata ZnS). Minerales que se caracterizan por su composición en Ag, Pb, Zn y precio de compra. Ver cuadro 1.

Cuadro 1
Datos del problema

M1				
Composición por (t) de mineral				Restricciones:
Kg Zn	Kg Pb	g Ag	Precio compra	
15	36	0,02	1,5	≥ 0,066 g Ag/ (t)min.
M2				
Composición por (t) de mineral				≤ 38, 4 Kg Pb/ (t) min.
Kg Zn	Kg Pb	g Ag	Precio compra	
10	24	0,15	3	≤ 7 Kg Zn/(t) min.
M3				
Composición por (t) de mineral				
Kg Zn	Kg Pb	g Ag	Precio compra	
5	48	0,01	1	

Fuente: Elaboración propia

En consecuencia, se busca determinar las cantidades de estos minerales que se deben mezclar por tonelada, para que cumpliendo con un máximo en la composición de plata, sea mínimo el contenido de plomo y zinc, maximizando el precio de compra de estos minerales. El programa lineal estándar para este problema se representa por:

Maximizar: $$z = 1{,}5x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad \text{(Ec. 16)}$$

Restricciones:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \qquad \text{(Ec, 17)}$$

$$0{,}02x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}01x_3 \geq 0{,}066 \qquad \text{(Inec. 9)}$$

$$36x_1 + 24x_2 + 48x_3 \leq 38{,}4 \qquad \text{(Inec. 10)}$$

$$15x_1 + 10x_2 + 5x_3 \leq 7 \qquad \text{(Inec. 11)}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Fuente: Elaboración propia

[13] z = 14(1000) + 16(500) + 20(500) = 32000

Soluciones

a) Great M method (Método de la gran M)[14] [13], [14]

Tratamiento agregado de programación lineal (PL) que permite desarrollar algoritmos simplex de acuerdo con los signos (=) y (≥) de las inecuaciones, incluyendo para el cambio de éstas a ecuaciones, variables auxiliares (s) y artificiales (R). Siendo estas últimas afectadas por el factor (M) que representa a una cantidad muy grande.

Las variables artificiales al no ser parte de la (PL) original, requieren ser igualadas a cero en el momento que se alcance la iteración óptima.

Conversión a ecuaciones e inclusión de variables de holgura auxiliares y artificiales.

Signo	Variable	Minimizar		Maximizar	
≤	*(s) holgura*	*0*		*0*	
=	*(R) artificial*	*+ M*		*− M*	
≥	*(R) artificial + auxiliar (−s)*	*+ M*	*0*	*− M*	*0*

Fuente: Elaboración propia sobre información de [13], [16]

Las restricciones y función objetivo del problema dos, de acuerdo con esta reglamentación están representadas por las ecuaciones 18 a 22 y sus coeficientes se muestran en la tabla A:

$$x_1 + x_2 + x_3 + R_1 = 1 \qquad \text{(Ec. 18)}$$
$$0{,}02x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}01x_3 + R_2 - s_4 = 0{,}066 \qquad \text{(Ec. 19)}$$
$$36x_1 + 24x_2 + 48x_3 + s_5 = 38{,}4 \qquad \text{(Ec. 20)}$$
$$15x_1 + 10x_2 + 5x_3 + s_6 = 7 \qquad \text{(Ec. 21)}$$
$$z = 1{,}5x_1 + 3x_2 + x_3 - MR_1 - MR_2 + 0s_4 + 0s_5 + 0s_6$$
$$z - 1{,}5x_1 - 3x_2 - x_3 + MR_1 + MR_2 - 0s_4 - 0s_5 - 0s_6 = 0 \qquad \text{(Ec. 22)}$$

	Tabla A	z	x1	x2	x3	R1	R2	s4	s5	s6	Sol.
f1	z	1	-1,5	-3	-1	M	M	0	0	0	0
f2	R1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
f3	R2	0	0,02	0,15	0,01	0	1	-1	0	0	0,066
f4	s5	0	36	24	48	0	0	0	1	0	38,4
f5	s6	0	15	10	5	0	0	0	0	1	7

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel

Por regla del método de la gran M, las variables artificiales R1 y R2 deben ser convertidas a cero y cumplir con la matriz identidad, por lo tanto es necesario plantear una serie de operaciones involucrando a las otras filas de la tabla A. En este caso multiplicando las filas 1 y 3 respectivamente por (-M) y sumando la fila 1 se llega al cambio exigido:

$$\mathbf{-Mf_2 + (-Mf_3) + f_1}$$

f2	(-M)	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
		0	(-M)	(-M)	(-M)	(-M)	0	0	0	0	(-M)
f3	(-M)	0	0,02	0,15	0,01	0	1	-1	0	0	0,066
		0	(-0,02M)	(-0,15M)	(-0,01M)	0	(-M)	M	0	0	-0,066M)
		0	(-1,02M)	(-1,15M)	(-1,01M)	(-M)	(-M)	M	0	0	-1,066M)
f1		1	-1,5	-3	-1	M	M	0	0	0	0
		1	(-1,5-1,02M)	(-3-1,15M)	(-1- 1,01M)	0	0	M	0	0	-1,066M)

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel

Efectuado este cambio en la fila 1, el desarrollo de la PL aplicando el algoritmo simplex, se muestra en las tablas A, B y C. La casilla con línea verde es parte de la columna de balanceo (permutas: x_2 por R_2, x_3 por R_1) y define la fila cociente menor (Sol./columna de Balanceo). Llegando a la solución ($x_1 = 0$) ($x_2 = 0{,}4$) ($x_3 = 0{,}6$) y ($z = 1{,}8$) iterando dos veces desde la tabla A.

Tabla A	z	x1	x2	x3	R1	R2	s4	s5	s6	Sol.
z	1	*	**	***	0	0	M	0	0	****
R1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
R2	0	0,02	0,15	0,01	0	1	-1	0	0	0,066
s5	0	36	24	48	0	0	0	1	0	38,4
s6	0	15	10	5	0	0	0	0	1	7

* (-1,5 - 1,02M) ** (-3 - 1,15M) *** (-1 - 1,01M) **** (-1,066M)

Tabla B	z	x1	x2	x3	R1	R2	s4	s5	s6	Sol.
z	1	*	0	**	0	(20 + 767M)	(-20 - 6,67M)	0	0	***
R1	0	0,867	0	0,933333	1	-6,667	6,667	0	0	0,56
x2	0	0,133	1	0,066667	0	6,667	-6,667	0	0	0,44
s5	0	32,8	0	46,4	0	-160	160	1	0	27,84
s6	0	13,67	0	4,333333	0	-66,67	66,67	0	1	2,6

* (-1,1 - 0,867M) ** (-0,8 -0,934M) *** (1,32 -0,5604M)

Tabla C	z	x1	x2	x3	R1	R2	s4	s5	s6	Sol.
z	1	-1,1	0	0	(0,85 +M)	(14,2 +M)	-14,2	0	0	1,8
x3	0	0,929	0	1	1,071	-7,143	7,143	0	0	0,6
x2	0	0,071	1	0	-0,071	7,143	-7,143	0	0	0,4
s5	0	-10,29	0	0	-49,71	171,4	-171,4	1	0	0
s6	0	9,643	0	0	-4,643	-35,71	35,71	0	1	0

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel

Para confirmar que el factor (M) representa ser una cantidad muy grande, sustituyéndole por (*1,00E+06*) en la tabla A, reporta un resultado similar para la tabla C.

Tabla C	x	x1	x2	x3	R1	R2	s4	s5	s6	Sol.
z	1	-0,3571	0	0	1000001	1000014	-14,29	0	0	1,8
x3	0	0,9286	0	1	1,071429	-7,14286	7,1429	0	0	0,6
x2	0	0,0714	1	0	-0,07143	7,142857	-7,143	0	0	0,4
s5	0	-10,286	0	0	-49,7143	171,4286	-171,4	1	0	0
s6	0	9,6429	0	0	-4,64286	-35,7143	35,714	0	1	0

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel

Análisis de los resultados problema dos

De acuerdo con este resultado, el óptimo en la función objetivo se puede lograr mezclando los minerales de las minas 2 y 3 en proporciones (0,4-0,6 respectivamente)[15], que maximiza el precio de compra de estos minerales con relación al contenido de plata.

b) Método de las fases [15], [16]

Fase I busca encontrar la solución factible básica inicial, y una vez encontrada, completa la PL con la **Fase II** para resolver el problema original.

- **Fase I.** De acuerdo con el signo de las inecuaciones se incorporan las variables de holgura, auxiliares y artificiales (exactamente como en el método de la Gran M). Las variables artificiales contribuyen a formular una función objetivo equivalente (r = ∑ R) y para la construcción de las tablas el valor de R será negativo para desarrollo del algoritmo simplex de maximización y positivo para la minimización de la función objetivo inicial. Si el desarrollo del algoritmo conduce a r = 0, el problema tiene solución factible, y se completa el problema en la fase II.

[14] GM method es un procedimiento agregado de PL que tiene sus limitaciones debido a los errores de redondeo. Usándose en su remplazo el método de las dos fases.

[15] Ag: 0,4[0,15g/ (t) min.] + 0,6[0,01g/ (t) min.] ≥ 0,066g/ (t) min.]
Pb: 0,4 [24Kg/ (t) min.] + 0,6[48g/ (t) min.] ≤ 38,4Kg/ (t) min.]
Zn: 0,4 [10Kg/ (t) min.] + 0,6[5g/ (t) min.] ≤ 7Kg/ (t) min.]
Z = (1,5)0,4 + (1)0,6 = 1,2 + 0,6 = 1,8
Mezcla: 400 Kg M_2 + 600 Kg M_3 = 1000 Kg nuevo mineral cumpliendo con las restricciones establecidas

- **Fase II.** Se incorpora en la tabla precedente de la fase I, los coeficientes de la función objetivo inicial cambiándoles el signo. Finalmente la conversión a matriz identidad en las variables asignadas a través de operaciones auxiliares de apoyo que permiten obtener la solución final.

Aplicando estas normativas a los datos del problema dos, la conversión de las inecuaciones a ecuaciones y la incorporación de variables establecen lo siguiente:

$$x_1 + x_2 + x_3 + R_1 = 1 \quad \text{(Ec. 23)}$$
$$0{,}02x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}01x_3 + R_2 - s_4 = 0{,}066 \quad \text{(Ec. 24)}$$
$$36x_1 + 24x_2 + 48x_3 + s_5 = 38{,}4 \quad \text{(Ec. 25)}$$
$$15x_1 + 10x_2 + 5x_3 + s_6 = 7 \quad \text{(Ec. 26)}$$
$$R_1, R_2 \text{ Máx. } -1 \text{ otras variables } 0$$
$$\text{Minimizar siempre nueva función objetivo } r = R_1 + R_2 \rightarrow 0$$

Transfiriendo los coeficientes a la TD se tiene:

TD	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	s_4	s_5	s_6	Sol.
r	-1,02	-1,15	-1,01	0	0	1	0	0	-1,066
R_1	1	1	1	1	0	0	0	0	1
R_2	0,02	0,15	0,01	0	1	-1	0	0	0,066
s_5	36	24	48	0	0	0	1	0	38,4
s_6	15	10	5	0	0	0	0	1	7

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel

Para convertir los coeficientes de las variables artificiales R_1 y R_2 en ceros (matriz identidad), las operaciones auxiliares para este caso corresponde a sumar las filas $f_3 + f_2 + f_1$.

f3	0,02	0,15	0,01	0	1	-1	0	0	0,066
f2	1	1	1	1	0	0	0	0	1
f1	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0
f1´	1,02	1,15	1,01	0	0	-1	0	0	1,066

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel

Por lo tanto la nueva fila f_1 incorporada en la tabla TD cambiando además sus signos por tratarse de un PL de maximización es:

TE	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	s_4	s_5	s_6	Sol.
r	-1,02	-1,15	-1,01	0	0	1	0	0	-1,066
R_1	1	1	1	1	0	0	0	0	1
R_2	0,02	0,15	0,01	0	1	-1	0	0	0,066
s_5	36	24	48	0	0	0	1	0	38,4
s_6	15	10	5	0	0	0	0	1	7

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel

Desarrollando sobre esta tabla el algoritmo simplex, identificación columna y fila de balanceo inicial se tiene la tabla TF y posteriormente la tabla TG:

TF	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	s_4	s_5	s_6	Sol.
r	-0,86666667	0	-0,93333333	0	7,666666667	-6,666666667	0	0	-0,56
x_3	0,866667	0	0,933333333	1	-6,66666667	6,666666667	0	0	0,56
x_2	0,133333333	1	0,066666667	0	6,666666667	-6,666666667	0	0	0,44
s_5	32,80000	0	46,4	0	-160	160	1	0	27,84
s_6	13,66666667	0	4,333333333	0	-66,6666667	66,66666667	0	1	2,6

TG	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	s_4	s_5	s_6	Sol.
r	0	0	0	1	1	0	0	0	0
x_3	0,928571	0	1	1,0714	-7,14285714	7,142857143	0	0	0,6
x_2	0,071428571	1	0	-0,071	7,142857143	-7,142857143	0	0	0,4
s_5	-10,28571	0	0	-49,71	171,4285714	-171,4285714	1	0	0
s_6	9,642857143	0	0	-4,643	-35,7142857	35,71428571	0	1	0

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel

Esta última tabla muestra que r = 0, por lo tanto el PL tiene una solución factible, situación que permite retirar las variables artificiales e introducir en la fila f_1 la función objetivo inicial y proceder a convertir los coeficientes a ceros (matriz identidad)[16] a través de operaciones auxiliares, para este caso, corresponde $(3f_3 + f_2 + f_1)$:

TH	x_1	x_2	x_3	s_4	s_5	s_6	Sol.
r	-1,5	-3	-1	0	0	0	0
x_3	0,928571	0	1	7,142857143	0	0	0,6
x_2	0,071428571	1	0	-7,14285714	0	0	0,4
s_5	-10,28571	0	0	-171,428571	1	0	0
s_6	9,642857143	0	0	35,71428571	0	1	0

3	0,071428571	1	0	-7,14285714	0	0	0,4
3f3	0,214285714	3	0	-7,14285714	0	0	1,2
f2	0,928571	0	1	7,142857143	0	0	0,6
f1	-1,5	-3	-1	0	0	0	0
	-0,35714	0	0	0	0	0	1,8

TI	x_1	x_2	x_3	s_4	s_5	s_6	Sol.
r	-0,35714286	0	0	-14,2857143	0	0	1,8
	0,928571	0	1	7,142857143	0	0	0,6
x_2	0,071428571	1	0	-7,14285714	0	0	0,4
s_5	-10,28571	0	0	-171,428571	1	0	0
s_6	9,642857143	0	0	35,71428571	0	1	0

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel

Solución utilizando la aplicación PHPsimplex

De manera similar esta aplicación utiliza el método de las dos fases, confirmando el resultado obtenido aplicación php simplex.

Tableau 1			1.5	3	1	0	0	0
Base	Cb	P0	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P7	-1	0	-2.0769230769231	0	0	-7.6923076923077	0	-0.21538461538462
P2	3	0.4	-0.076923076923077	1	0	-7.6923076923077	0	-0.015384615384615
P5	0	0	-113.53846153846	0	0	-553.84615384615	1	-10.707692307692
P3	1	0.6	3.1538461538462	0	1	15.384615384615	0	0.23076923076923
Z		1.8	3.5	0	0	3.5527136788005E-15	0	0.4

The optimal solution value is Z = 1.8
X1 = 0
X2 = 0.4
X3 = 0.6

Fuente: [7]

Tercer ejemplo:

Dualidad: A cada PL en las variables $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ toca, asociado, otro PL de variables $(w_1, w_2, \ldots w_m)$ donde $(_m)$ es el número de restricciones del PL original. Siendo este PL el ***dual*** del programa original o primario [17], [18], [19]. Si:

DUALES SIMÉTRICOS

PL PRIMARIO ESTÁNDAR		PL DUAL ESTÁNDAR	
Minimizar	$Z = C^T X$	Maximizar	$Z = B^T W$
Condición	$AX \geq B$	Condición	$AW \leq C$
Si	$X \geq 0$	Si	$X \geq 0$
Teorema de la dualidad: Si existe una solución óptima para el PL original o para el PL dual, entonces éste tiene una solución también óptima y las dos funciones objetivo tiene el mismo valor óptimo [17].			

Fuente: Elaboración propia, sobre información de [17]

[16] Matriz cuadrada de orden n donde todos sus elementos son ceros menos los elementos de la diagonal principal. Cumple las propiedades de ser un elemento neutro del producto de matrices por lo que el producto de cualquier matriz por la matriz identidad no tiene efecto.

DUALES ASIMÉTRICOS

PL PRIMARIO ESTÁNDAR		PL DUAL ESTÁNDAR	
Minimizar	$Z = C^{\tau}X$	Maximizar	$Z = B^{\tau}W$
Condición	$AX = B$	Condición	$AW \leq C$
Si	$X \geq 0$	Si	$X \geq 0$
Maximizar	$Z = C^{\tau}X$	Minimizar	$Z = B^{\tau}W$
Condición	$AX = B$	Condición	$AW \geq C$
Si	$X \geq 0$	Si	$X \geq 0$
Teorema de la dualidad: Es válido para PL asimétricos			

Fuente: Elaboración propia, sobre información de [17]. [18], [19]

PL original distribución de productos: Una empresa que distribuye y comercializa bolsas para despachar productos de supermercado fabricadas de polietileno biodegradable, ha importado 1200 rollos de bolsas (país 1) y 1000 rollos de bolsas (país 2). Toda esta producción debe ser enviada a tres supermercados de la ciudad (diferentes distancias de recorrido) en cantidades de 1000, 700 y 500 rollos, respectivamente. Si el costo de envío por rollo hasta los tres supermercados es:

Cuadro 1
Datos del problema

		Costo de envío por rollo (Bs.)		
Producto	Cantidad	SM_1	SM_2	SM_3
País 1	1200 rollos	0,14	0,13	0,11
País 2	1000 rollos	0,13	0,13	0,12

Fuente: Elaboración propia, problema 3 MIIF

Determinar una mezcla de productos óptima según el inventario total de 2200 rollos de costo mínimo.

Planteamiento del PL en forma estándar:

$$\textit{Minimizar: } z = C^{\tau}X$$
$$\textit{Con la condición: } AX = B$$
$$y\text{: } X \geq 0$$

$(B \geq 0)$, representa la solución básica factible empezando con (X_0).

Minimizar:

$$z = 0{,}14x1_{P1} + 0{,}13\,x2_{P1} + 0{,}11x3_{P1} + 0{,}13x4_{P2} + 0{,}13x5_{P2} + 0{,}12x6_{P2}$$

Restricciones:

$$\textit{Distribución rollos país 1} \quad x1P1 + x2P1 + x3P1 = 1200$$
$$\textit{Distribución rollos país 2} \quad x4P2 + x5P2 + x6_{P2} = 1000$$
$$x1P1 + x4P2 = 1000 \textit{ rollos supermercado 1}$$
$$x2P1 + x5P2 = 700 \textit{ rollos supermercado 2}$$
$$x3P1 + x6P2 = 500 \textit{ rollos supermercado 3}$$

Fuente: Elaboración propia, problema 3 MIIF

P3a) Métodos de las dos fases

$$z = 0{,}14x1P1 + 0{,}13\,x2P1 + 0{,}11x3P1 + 0{,}13x4P2 + 0{,}13x5P2 + 0{,}12x6P2 + R7 + R8 + R9 + R10 + R11$$

$$r = 0x1P1 + 0x2P1 + 0x3P1 + 0x4P2 + 0x5P2 + 0x6P2 + R7 + R8 + R9 + R10 + R11 = 0$$

$$R7 \textit{ a } R11 = 1 \textit{ criterio de minimización}$$

Con todos estos datos la tabla de inicio para aplicar el algoritmo simplex es:

Tabla 0	x1P1	x2P1	x3P1	x4P2	x5P2	x6P2	R7	R8	R9	R10	R11	Sol.
r	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
R7	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1200
R8	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1000
R9	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1000
R10	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	700
R11	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	500

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel problema 3 MIIF

En esta primera fase, para llevar a cero R7 a R11 (matriz) identidad) la operación corresponde a:

$$\{[(-1)\ f5 + f4 + f3 + f2] + f1\}.$$

En la tabla 1 se incorpora esta operación y además se identifican la columna y fila de balanceo con el elemento casilla de intersección:

	Tabla 1	x1P1	x2P1	x3P1	x4P2	x5P2	x6P2	R7	R8	R9	R10	R11	Sol.
f1	r	-2	-2	-2	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	-4400
f2	R7	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1200
f3	R8	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1000
f4	x1P1	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1000
f5	R10	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	700
f6	R11	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	500

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel problema 3 MIIF

Prosiguiendo con la iteración identificando columna y fila de balanceo del algoritmo simplex para llegar a r = 0, ver tablas 2, 3, 4, y 5.

Tabla 2	x1P1	x2P1	x3P1	x4P2	x5P2	x6P2	R7	R8	R9	R10	R11	Sol.
r	0	-2	-2	0	-2	-2	0	0	2	0	0	-2400
x2P1	0	$\boxed{1}$	1	-1	0	0	1	0	-1	0	0	200
R8	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1000
x1P1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1000
R10	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	700
R11	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	500

Tabla 3	x1P1	x2P1	x3P1	x4P2	x5P2	x6P2	R7	R8	R9	R10	R11	Sol.
r	0	0	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	-2000
x2P1	0	1	1	-1	0	0	1	0	-1	0	0	200
R8	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1000
x1P1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1000
R10	0	0	-1	1	1	0	0	0	1	1	0	500
x3P1	0	0	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	0	0	1	500

Tabla 4	x1P1	x2P1	x3P1	x4P2	x5P2	x6P2	R7	R8	R9	R10	R11	Sol.
r	0	0	-2	0	0	-2	0	0	2	2	0	-1000
x2P1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	700
R8	0	0	1	0	0	1	0	1	-1	-1	0	500
x1P1	1	0	1	0	-1	0	0	0	0	-1	0	500
x4P2	0	0	-1	$\boxed{1}$	1	0	0	0	1	1	0	500
x3P1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	500

Tabla 5	x1P1	x2P1	x3P1	x4P2	x5P2	x6P2	R7	R8	R9	R10	R11	Sol.
r	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	$\boxed{0}$
x2P1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	700
R8	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1	-1	0
x1P1	1	0	0	0	-1	-1	0	0	0	-1	-1	0
x4P2	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1000
x3P1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	500

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel problema 3 MIIF

Pasando a la segunda fase, al incorporar los coeficientes de la función objetivo original en la fila 1 y no tomando en cuenta las variables artificiales R7 a R11, la tabla 1 IIF recoge los siguientes datos:

Tabla1 IIf	x1P1	x2P1	x3P1	x4P2	x5P2	x6P2	Sol.
z	0,14	0,13	0,11	0,13	0,13	0,12	0
x2P1	0	1	0	0	1	0	700
R8	0	0	0	0	0	0	0
x1P1	1	0	0	0	-1	-1	0
x4P2	0	0	0	1	1	1	1000
x3P1	0	0	1	0	0	1	500

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel problema 3 MIIF

Anulando estos coeficientes (matriz identidad) aplicando la operación:

$$[-1[0{,}14(f4) + 0{,}13(f2) + 0{,}11(f6) + 0{,}13(f5)] + f1^{17}$$

Concluye la iteración del algoritmo simplex con los datos siguientes:

Tabla1 IIf	x1P1	x2P1	x3P1	x4P2	x5P2	x6P2	Sol.
z	0	0	0	0	0,01	0,02	-276
x2P1	0	1	0	0	1	0	700
R8	0	0	0	0	0	0	0
x1P1	1	0	0	0	-1	-1	0
x4P2	0	0	0	1	1	1	1000
x3P1	0	0	1	0	0	1	500

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel problema 3 MIIF

Por lo tanto si:

$$x2P1 = 700,\ x1P1 = 0,\ x4P2 = 1000,\ x3P1 = 500,$$
$$x5P2 = 0 \text{ y } x6P2 = 0$$

Los envíos para cada supermercado según el país de importación indican lo siguiente:

$$x1P1 + x4P2 = 1000 \text{ , rollos supermercado 1}$$
$$0 + 1000 = 1000\ P2$$
$$x2P1 + x5P2 = 700 \text{ rollos supermercado 2}$$
$$700 + 0 = 700\ P1$$
$$x3P1 + x6P2 = 500 \text{ rollos supermercado 3}$$
$$500 + 0 = 500\ P1$$

Minimizando el costo de envío a:

$$z = 0{,}13(700) + 0{,}13\ (1000) + 0{,}11(500) = 276 \text{ Bs.}$$

El análisis combinatorio para este PL con once variables (cinco reales y seis artificiales), más cinco restricciones, establecen 462 combinaciones. Correspondiendo a la solución óptima, la obtenida por el algoritmo simplex verificable a través del desarrollo matricial siguiente:

x1P1	x2P1	x3P1	x4P2	R8			x1P1	x2P1	x3P1	x4P2	R8		
1	1	1	0	0			1200	1	1	0	0		
0	0	0	1	1			1000	0	0	1	1		
1	0	0	1	0			1000	0	0	1	0		
0	1	0	0	0	Δ		700	1	0	0	0		x1p1
0	0	1	0	0	-1		500	0	1	0	0	0	0
x1P1	x2P1	x3P1	x4P2	R8			x1P1	x2P1	x3P1	x4P2	R8		
1	1200	1	0	0			1	1	1200	0	0		
0	1000	0	1	1			0	0	1000	1	1		
1	1000	0	1	0			1	0	1000	1	0		
0	700	0	0	0		x2p1	0	1	700	0	0		x3p1
0	500	1	0	0	-700	700	0	0	500	0	0	-500	500
x1P1	x2P1	x3P1	x4P2	R8			x1P1	x2P1	x3P1	x4P2	R8		
1	1	1	1200	0			1	1	1	0	1200		
0	0	0	1000	1			0	0	0	1	1000		
1	0	0	1000	0			1	0	0	1	1000		
0	1	0	700	0		x4p2	0	1	0	0	700		R8
0	0	1	500	0	-1000	1000	0	0	1	0	500	0	0

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla Excel desarrollo matricial P3a para el sistema de cinco ecuaciones

17

			x1P1	x2P1	x3P1	x4P2	x5P2	x6P2	Sol.
f4	x1P1	-0,14	1	0	0	0	-1	-1	0
			-0,14	0	0	0	0,14	0,14	0
f2	x2P1	-0,13	0	1	0	0	1	0	700
			0	-0,13	0	0	-0,13	0	-91
f6	x3P1	-0,11	0	0	1	0	0	1	500
			0	0	-0,11	0	0	-0,11	-55
f5	x4P2	-0,13	0	0	0	1	1	1	1000
			0	0	0	-0,13	-0,13	-0,13	-130
	(+f1)		0,14	0,13	0,11	0,13	0,13	0,12	0
			0	0	0	0	0,01	0,02	-276

P3b) PL Dual

Esta función objetivo puede ser obtenida por el PL dual asimétrico de acuerdo con:

PL PRIMARIO ESTÁNDAR		PL DUAL ESTÁNDAR	
Minimizar	$z = C^{\tau}X$	Maximizar	$z = B^{\tau}W$
Condición	$AX = B$	Condición	$AW \leq C$

En consecuencia El PL dual estándar es:

$$\text{Maximizar: } z = B^{\tau}W$$
$$\text{Con la condición: } AW \leq C, \quad \text{y: } W \geq 0$$

Cambiando fila por columna, la función objetivo dual y las restricciones toman en cuenta los coeficientes:

$$z = 1200w1 + 1000\ w2 + 1000w3 + 700w4 + 500w5$$

$$w1 + w3 \leq 0{,}14$$
$$w1 + w4 \leq 0{,}13$$
$$w1 + w5 \leq 0{,}11$$
$$w2 + w3 \leq 0{,}13$$
$$w2 + w4 \leq 0{,}11$$
$$w2 + w5 \leq 0{,}13$$

Convirtiendo a ecuaciones e incluyendo las variables de holgura slacks variables (s) que definen al signo menor o igual (≤):

$$w1 + w3 + s6 = 0{,}14$$
$$w1 + w4 + s7 = 0{,}13$$
$$w1 + w5 + s8 = 0{,}11$$
$$w2 + w3 + s9 = 0{,}13$$
$$w2 + w4 + s10 = 0{,}13$$
$$w2 + w5 + s11 = 0{,}12$$

Para desarrollar el correspondiente algoritmo simplex, la tabla de inicio T0P3-D es:

T0P3-D	w1	w2	w3	w4	w5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	Sol
z	-1200	-1000	-1000	-700	-500	0	0	0	0	0	0	0
s6	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0,14
s7	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0,13
s8	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0,11
s9	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0,13
s10	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0,13
s11	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0,12

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel problema 3, PL - DUAL

Prosiguiendo con las iteraciones T1P3-D a T5P3-D5 se obtiene el mismo valor para la función objetivo PL primaria y PL dual (teorema de la dualidad); y las variables asignadas al problema 3 por el método de las dos fases aparecen en la primera fila casillas slacks variables s7, s8 y s9.

T1P3-D	w1	w2	w3	w4	w5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	Sol
z	0	-1000	-1000	-700	700	0	0	1200	0	0	0	132
s6	0	0	1	0	-1	1	0	-1	0	0	0	0,03
s7	0	0	0	1	-1	0	1	-1	0	0	0	0,02
w1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0,11
s9	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0,13
s10	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0,13
s11	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0,12

T2P3-D	w1	w2	w3	w4	w5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	Sol
z	0	0	-1000	-700	1700	0	0	1200	0	0	1000	252
s6	0	0	1	0	-1	1	0	-1	0	0	0	0,03
s7	0	0	0	1	-1	0	1	-1	0	0	0	0,02
w1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0,11
s9	0	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	-1	0,01
s10	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	-1	0,01
w2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0,12

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel problema 3, PL - DUAL

T3P3-D	w1	w2	w3	w4	w5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	Sol
z	0	0	-1000	-700	1700	0	0	1200	0	0	1000	252
s6	0	0	1	0	-1	1	0	-1	0	0	0	0,03
s7	0	0	0	1	-1	0	1	-1	0	0	0	0,02
w1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0,11
w3	0	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	-1	0,01
s10	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	-1	0,01
w2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0,12

T4P3-D	w1	w2	w3	w4	w5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	Sol
z	0	0	0	-700	700	0	0	1200	1000	0	0	262
s6	0	0	0	0	0	1	0	-1	-1	0	1	0,02
s7	0	0	0	1	-1	0	1	-1	0	0	0	0,02
w1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0,11
w3	0	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	-1	0,01
w4	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	-1	0,01
w2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0,12

T5P3-D	w1	w2	w3	w4	w5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	Sol
z	0	0	0	0	0	0	700	500	1000	0	0	276
s6	0	0	0	0	0	1	-1	0	-1	1	0	0,01
s11	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	-1	1	0,01
w1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0,11
w3	0	0	1	0	-1	0	1	-1	1	-1	0	0,02
w4	0	0	0	1	-1	0	1	-1	0	0	0	0,02
w2	0	1	0	0	1	0	-1	1	0	1	0	0,11

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla hoja Excel problema 3, PL - DUAL

Evaluando (z) a partir de los valores encontrados para ***w1, w2, w3, w4***, y ***w5***

$$z = 1200w1 + 1000\,w2 + 1000w3 + 500w4 + 700w5$$
$$z = 1200(0{,}11) + 1000(0{,}11) + 1000(0{,}02) + 700(0{,}02) + 500(0)$$
$$z = 276$$

El análisis combinatorio para este PL con once variables (cinco reales y seis artificiales), más seis restricciones, establecen también 462 combinaciones. Correspondiendo a la solución óptima, la obtenida por el algoritmo simplex verificable a través del desarrollo matricial siguiente:

w1	w2	w3	w4	s6	s11		w1	w2	w3	w4	s6	s11	
1	0	1	0	1	0		1	0	0,14	0	1	0	
1	0	0	1	0	0		1	0	0,13	1	0	0	
1	0	0	0	0	0		1	0	0,11	0	0	0	
0	1	1	0	0	0		0	1	0,13	0	0	0	
0	1	0	1	0	0	Δ	0	1	0,13	1	0	0	w3
0	1	0	0	0	1	1	0	1	0,12	0	0	1	0,02
w1	w2	w3	w4	s6	s11		w1	w2	w3	w4	s6	s11	
0,14	0	1	0	1	0		1	0	1	0,14	1	0	
0,13	0	0	1	0	0		1	0	0	0,13	0	0	
0,11	0	0	0	0	0		1	0	0	0,11	0	0	
0,13	1	1	0	0	0		0	1	1	0,13	0	0	
0,13	1	0	1	0	0	w1	0	1	0	0,13	0	0	w4
0,12	1	0	0	0	1	0,11	0	1	0	0,12	0	1	0,02
w1	w2	w3	w4	s6	s11		w1	w2	w3	w4	s6	s11	
1	0,14	1	0	1	0		1	0	1	0	0,14	0	
1	0,13	0	1	0	0		1	0	0	1	0,13	0	
1	0,11	0	0	0	0		1	0	0	0	0,11	0	
0	0,13	1	0	0	0		0	1	1	0	0,13	0	
0	0,13	0	1	0	0	w2	0	1	0	1	0,13	0	s6
0	0,12	0	0	0	1	0,11	0	1	0	0	0,12	1	0,01
							w1	w2	w3	w4	s6	s11	
	w1 + w3 + s6 = 0,14						1	0	1	0	1	0,14	
	w1 + w4 + s7 = 0.13						1	0	0	1	0	0,13	
	w1 + w5 + s8 = 0,11						1	0	0	0	0	0,11	
	w2 + w3 + s9 = 0,13						0	1	1	0	0	0,13	
	w2 + w4 + s10 = 0,13						0	1	0	1	0	0,13	s11
	w2 + w5 + s11 = 0,12						0	1	0	0	0	0,12	0,01

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla Excel desarrollo matricial P3a para el sistema de cinco ecuaciones

La importancia de este resultado permite comparar frente al promedio de estos costos de envío, cálculo que por lo general se considera cuando no se tiene la información disgregada. Siendo el promedio de los costos 0,1267 Bs. y este valor afectando el total del número de rollos 2200, reporta 278,67 Bs. Estableciendo una diferencia de 2,67 Bs., que para fines de un mayor volumen de envíos es significativo, y además aporta con una mejor información para la toma de decisiones al respecto.

Cuarto ejemplo:

Programación entera y acotación

Un programa entero es un PL que exige obtener una solución con cifras enteras y que todas las variables sean enteras. Por lo tanto, se puede iniciar el algoritmo simplex o alguna de sus variantes preliminares según el signo de las inecuaciones como una primera aproximación, y resolviendo el PL obtener un resultado sobre el cual se pueden efectuar redondeos de cifras, bifurcaciones y acotaciones que permiten desarrollar un nuevo algoritmo en busca de una segunda aproximación que tiene una determinada desviación porcentual respecto a la primera aproximación, pero que concluye con una solución óptima factible. [20], [21], [22]

a) P4

Aplicación a un problema con dependencia entre el volumen y peso de cinco productos sólidos de forma cúbica con lados diferentes, que deben ser introducidos en cinco contenedores de capacidades 130 cm^3 (1), 149 cm^3 (1) y 110 cm^3 (3), que en conjunto pueden alcanzar 609 cm^3 en volumen y 300 g en peso. Buscando obtener el máximo en la función objetivo (relación: volumen/peso) a través de la selección de cuáles cubos y en qué cuantía deben ser colocados estos cubos al interior de los cinco contenedores.

Primera aproximación:

Sólido cúbico	Volumen (cm^3)	Peso (g)	Relación Vol./peso
x_1	13	6	11
x_2	26	7	12
x_3	11	5	9
x_4	16	4	13
x_5	20	8	10

Maximizar: $z = 11x_1 + 12x_2 + 9x_3 + 13x_4 + 10x_5$

Restricciones: $6x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 8x_5 \leq 300$
$13x_1 + 26x_2 + 11x_3 + 16x_4 + 20x_5 \leq 609$

Transformación a ecuaciones incorporando variables de holgura (s):

$$6x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 8x_5 + s_6 = 300$$
$$13x_1 + 26x_2 + 11x_3 + 16x_4 + s_7 = 609$$

Fuente: Elaboración propia

Las tablas T0-P4´, T1-P4´y T2-P4´ muestran el desarrollo del algoritmo simplex.

T0-P4´	x1	x2	x3	x4	x5	s6	s7	B
z	-11	-12	-9	-13	-10	0	0	0
s6	6	7	5	4	8	1	0	300
s7	13	26	11	16	20	0	1	609

T1-P4´	x1	x2	x3	x4	x5	s6	s7	B
z	-0,44	9,13	-0,06	0	15,3	0	0,81	487,5
s6	2,75	0,5	2,25	0	3	1	-0,25	150,0
x1	0,81	1,63	0,69	1	1,25	0	0,06	37,5

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla Excel desarrollo PL P4´ primera aproximación

T2-P4´	x1	x2	x3	x4	x5	s6	s7	B
z	0	10	0,31	0,54	6,92	0	0,85	515,308
s6	0	-5	-0,08	-3,38	-1,23	1	-0,46	18,9231
x1	1	2	0,85	1,23	1,54	0	0,08	46,8462

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla Excel desarrollo PL P4´ primera aproximación

Discusión del resultado P4´ y segunda aproximación:

- Considerando este resultado, sólo se llenarían los contenedores con el sólido cúbico x_1 en un número entero de 46. Sin embargo, de acuerdo con las condiciones físicas de los contenedores y el volumen del sólido cúbico x_1 = 13 cm^3 se pueden llenar los tres contenedores de 110 cm^3 con 24 cubos y en el caso de los contenedores de 130 y 149 cm^3 con 10 y 11. Por lo tanto sólo se pueden introducir 45 cubos dejando un equivalente en volumen libre de 24 cm^3 (609-585), en consecuencia sobre este resultado real, la función objetivo corresponde a (45 x11) = 495, reduciendo además el peso en 30 g.

Sin embargo, acotando algunas variables, la nueva PL considera lo siguiente:

Maximizar: $z = 11x_1 + 12x_2 + 9x_3 + 13x_4 + 10x_5$

Restricciones:

$$6x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 8x_5 \leq 300$$
$$13x_1 + 26x_2 + 11x_3 + 16x_4 + 20x_5 \leq 609$$
$$x_1 + x_3 \leq 46$$
$$x_1 \leq 10$$
$$x4 \leq 4$$
$$x2 \leq 0$$
$$x5 \leq 0$$
$$\textit{Condición: } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Convirtiendo a ecuaciones:

$$6x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 8x_5 + s_6 = 300$$
$$13x_1 + 26x_2 + 11x_3 + 16x_4 + 20x_5 + s_7 = 609$$
$$x_1 + x_3 + s_8 = 46$$
$$x_1 + s_9 = 10$$
$$x_4 + s_{10} = 4$$
$$x_2 + s_{11} = 0$$
$$x_5 + s_{12} = 0$$

Fuente: Elaboración propia

Según el signo de las inecuaciones (≤) y la orden de maximizar, la tabla de inicio corresponde a:

T0P4	x1	x2	x3	x4	x5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	s12	B
z	-11	-12	-9	-13	-10	0	0	0	0	0	0	0	0
s6	6	7	5	4	8	1	0	0	0	0	0	0	300
s7	13	26	11	16	20	0	1	0	0	0	0	0	609
s8	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	46
s9	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	10
s10	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	4
s11	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
s12	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla Excel desarrollo PL P4 segunda aproximación

Prosiguiendo con las tablas T1P4 a T6P4:

T1P4	x1	x2	x3	x4	x5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	s12	B
z	-11	-12	-9	0	-10	0	0	0	0	13	0	0	52
s6	6	7	5	0	8	1	0	0	0	-4	0	0	284
s7	13	26	11	0	20	0	1	0	0	-16	0	0	545
s8	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	46
s9	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	10
x4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	4
s11	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
s12	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla Excel desarrollo PL P4 segunda aproximación

T2P4	x1	x2	x3	x4	x5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	s12	B
z	-11	0	-9	0	-10	0	0	0	0	13	12	0	52
s6	6	0	5	0	8	1	0	0	0	-4	-7	0	284
s7	13	0	11	0	20	0	1	0	0	-16	-26	0	545
s8	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	46
s9	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	10
x4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	4
x2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
s12	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0

T3P4	x1	x2	x3	x4	x5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	s12	B
z	-11	0	-9	0	-10	0	0	0	0	13	12	0	52
s6	6	0	5	0	8	1	0	0	0	-4	-7	0	284
s7	13	0	11	0	20	0	1	0	0	-16	-26	0	545
s8	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	46
x1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	10
x4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	4
x2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
s12	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0

T4P4	x1	x2	x3	x4	x5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	s12	B
z	0	0	-9	0	-10	0	0	0	11	13	12	0	162
s6	0	0	5	0	8	1	0	0	-6	-4	-7	0	224
s7	0	0	11	0	20	0	1	0	-13	-16	-26	0	415
s8	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	36
x1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	10
x4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	4
x2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
s12	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0

T5P4	x1	x2	x3	x4	x5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	s12	B
z	0	0	0	0	-10	0	0	9	2	13	12	0	486
s6	0	0	0	0	8	1	0	-5	-1	-4	-7	0	44
s7	0	0	0	0	20	0	1	-11	-2	-16	-26	0	19
x3	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	36
x1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	10
x4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	4
x2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
s12	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0

T6P4	x1	x2	x3	x4	x5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	s12	B
z	0	0	0	0	0	0	0	9	2	13	12	10	486
s6	0	0	0	0	0	1	0	-5	-1	-4	-7	-8	44
s7	0	0	0	0	0	0	1	-11	-2	-16	-26	-20	19
x3	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	36
x1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	10
x4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	4
x2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
x5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla Excel desarrollo PL P4 segunda aproximación

Confirma este resultado el desarrollo matricial 7x7 para la resolución de este sistema de ecuaciones, considerando 12 variables (v): cinco reales (e) y siete de holgura (s). De una combinatoria [12!/ 5!(12-5)!] = 792 opciones.

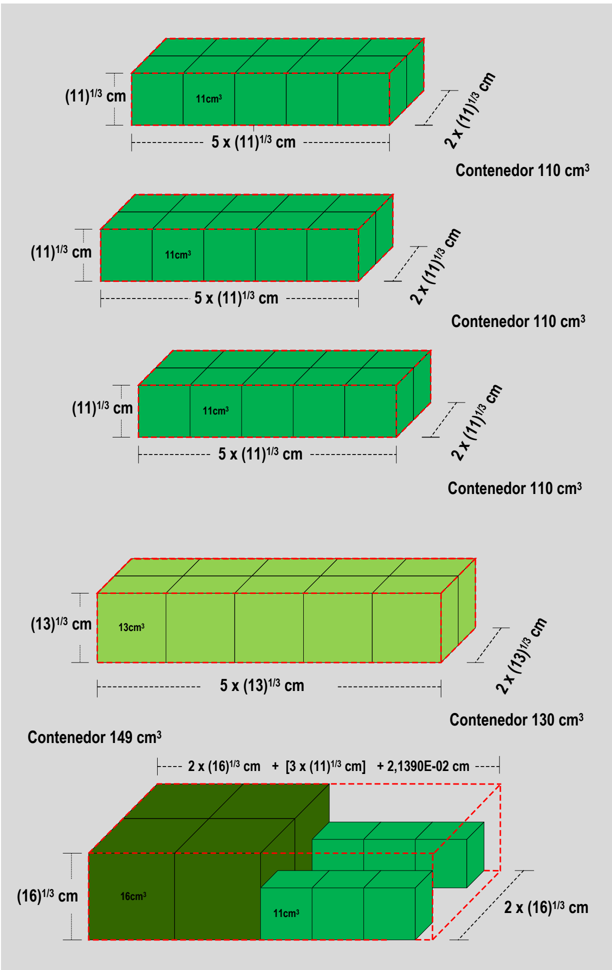
x1	x2	x3	x4	x5	s6	s7		B										
6	7	5	4	8	1	0		300		6	7	5	300	8	1	0		
13	26	11	16	20	0	1		609		13	26	11	609	20	0	1		
1	0	1	0	0	0	0		46		1	0	1	46	0	0	0		
1	0	0	0	0	0	0		10		1	0	0	10	0	0	0		
0	0	0	1	0	0	0		4		0	0	0	4	0	0	0		
0	1	0	0	0	0	0	Δ	0		0	1	0	0	0	0	0		x4
0	0	0	0	1	0	0	-1	0		0	0	0	0	1	0	0	-4	4
300	7	5	4	8	1	0				6	7	5	4	300	1	0		
609	26	11	16	20	0	1				13	26	11	16	609	0	1		
46	0	1	0	0	0	0				1	0	1	0	46	0	0		
10	0	0	0	0	0	0				1	0	0	0	10	0	0		
4	0	0	1	0	0	0				0	0	0	1	4	0	0		
0	1	0	0	0	0	0		x1		0	1	0	0	0	0	0		x5
0	0	0	0	1	0	0	-10	10		0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	300	5	4	8	1	0				6	7	5	4	8	300	0		
13	609	11	16	20	0	1				13	26	11	16	20	609	1		
1	46	1	0	0	0	0				1	0	1	0	0	46	0		
1	10	0	0	0	0	0				1	0	0	0	0	10	0		
0	4	0	1	0	0	0				0	0	0	1	0	4	0		
0	0	0	0	0	0	0		x2		0	1	0	0	0	0	0		s6
0	0	0	0	1	0	0	0	0		0	0	0	0	1	0	0	-44	44
6	7	300	4	8	1	0				6	7	5	4	8	1	300		
13	26	609	16	20	0	1				13	26	11	16	20	0	609		
1	0	46	0	0	0	0				1	0	1	0	0	0	46		
1	0	10	0	0	0	0				1	0	0	0	0	0	10		
0	0	4	1	0	0	0				0	0	0	1	0	0	4		
0	1	0	0	0	0	0		x3		0	1	0	0	0	0	0		s7
0	0	0	0	1	0	0	-36	36		0	0	0	0	1	0	0	-19	19

Fuente: Elaboración propia, edición captura de pantalla Excel desarrollo matricial PL P4 segunda aproximación

A partir de los resultados de la tabla T6P4, la mezcla de sólidos cúbicos que optimizan la función objetivo es:

$x_1 = 10, x_2 = x_5 = 0, x_3 = 36, x_4 = 4$
$z = 11(10) + 8(36) + 13(4) = 486$
Distribución de cubos
(30) x_3 *en los 3 contenedores de 110* cm^3
(6) x_3 *+ (4)* x_4 *contenedor de 149* cm^3
(10) x_1 *contenedor de 130* cm^3
Volumen ocupado total 13(10) + 11(36) + 16(4) = 590 cm^3
Peso total 6(10) + 5(36) + 4(4) =256g
Volumen libre (s_7) *3,2% (19* cm^3*)*
Liberación del peso (s_6) *15% (44g)*
Total cubos en contenedores 50
Desviación (z) respecto a la PL original (486/515,308) x 100 ≈ 6%
Desviación (z) respecto disposición física PL segunda. aproximación (486/495) x 100 ≈ 2%

En la figura 4 se muestra la mejor disposición física de sólidos cúbicos en los cinco contenedores, tomando en cuenta la reducción del peso (15 porciento) y la cobertura máxima del volumen (96,8%) totales, con la consecuente función objetivo (486) estandarizada.



Fuente: Elaboración propia

Figura 4: Disposición física de sólidos cúbicos en cinco contenedores, problema 4 segunda aproximación

En variedad de casos el cambiar desde una PL inicial no entera hacia otra entera; debido a la inclusión de acotaciones, bifurcaciones (alternativa mayor y menor que acota las restricciones), además del redondeo de la parte decimal, ocasiona que el valor de la función objetivo tenga una deviación respecto al valor de la PL original. En estos casos si bien no se tiene un óptimo muy bien definido, el resultado puede ser considerado en general como un **estándar**, modelo, norma, patrón o referencia, en problema reales de optimización de PL.

En consecuencia, respecto al problema propuesto, por la forma de los contenedores y el volumen de los sólidos cúbicos, además de la imposibilidad de fraccionarlos, la solución estándar pertenece a la mostrada en la figura 4.

Principales áreas actuales de aplicación (As) y (PL)

Al tomar en cuenta una **característica en común** que se requiere **distribuir o mezclar** considerando un modelo lineal de comportamiento, las principales aplicaciones corresponden a operaciones de:

- **Producción** (asignación óptima de recursos en general, control de inventarios).
- **Administración** (planificación movimientos y transportes, inversiones).

Temas adicionales de PL más complejos y algoritmo simplex

- Flujo capacitado de costo mínimo, formulación de PL y algoritmo simplex de red capacitada. (Resolución de problemas de transporte).
- Algoritmo de descomposición de Danzing-Wolfe. (Divide un problema original en sub problemas).
- Algoritmo de punto interior de Karmarkar. (Resolución de problemas PL con un gran número de variables, produce soluciones al interior de la región factible).

CONCLUSIONES

A través de estos cuatro ejemplos se ha buscado resaltar el objeto de estudio, los principales criterios para desarrollar el algoritmo simplex (AS) y su relación con temas propios de la programación lineal (PL), dualidad, programaciones paramétrica y entera.

Mejorando de esta manera las fuentes de información para una toma de decisiones específica con soporte matemático objetivo y cuantificable; asignando variables implicadas en la optimizando de una función objetivo, que generalmente está ligada a factores económicos que son fundamentales para el desarrollo y sostenibilidad productiva de cualquier emprendimiento actual.

- **Objeto de estudio**

  Toma en cuenta una **característica en común** que se requiere **distribuir o mezclar** considerando un modelo matemático lineal de comportamiento entre sus variables.

- **Principales criterios para aplicar el algoritmo simplex**

1. Representación de Programas lineales tomando en cuenta la función objetivo (maximizar o minimizar), las restricciones y la condición que todas las variables sean positiva.
2. Factibilidad de dependencia lineal.
3. Adición de variables básicas y variables auxiliares de acuerdo con los signos de las inecuaciones (caracterización de restricciones).
4. Elaboración de tableaux (tablas de iteración):

4.1. Simplex normal, variables de holgura (s) , signo (≤).

4.2. Simplex modificado, variables auxiliares (R y s). Método gran M y procedimiento de dos fases, cuando Las restricciones incluyen signos (=), (≥).

5. Cambios de signo según los coeficientes de la función objetivo (maximización o minimización).
6. Identificación columnas de balanceo.
7. Elemento de balanceo resultado menor cociente B/ valor fila de balanceo.
8. Desarrollo del algoritmo hasta conseguir la condición de parada (stop condition) o cambio de signo en los coeficientes de la función objetivo.

- **Base procedimental aplicativa del algoritmo simplex**

Abstrayendo en parte la fundamentación matemática pura y rigurosa de este procedimiento[18]. El algoritmo simplex (AS) fundamenta su aplicación, eligiendo entre los valores de la fila (z) al número negativo más extremo (maximización), o al número positivo más extremo (minimización) y en función a éstos establece la columna de balanceo (cb_1) que luego se relaciona con la columna (B) a través del cociente menor B/ valor casillas de la columna de balanceo de la columna de balanceo (cb_1). La fila del cociente menor encontrado define la fila de balanceo (fb_1), y a la vez identifica el valor de casilla que debe ser convertido a la unidad efectuando el producto con el valor recíproco de la casilla, afectando a todas las otras casillas de la fila de balanceo (fb_1).

Obtenida la unidad para la casilla de la fila de balanceo, la nueva fila (fb_1´) sirve para operar con los valores de las casillas de la columna de balanceo cambiando su signo para de esta manera obtener los correspondientes ceros.

La tabla J sirve de inicio para operar el procedimiento fundamental del algoritmo simplex, convirtiendo los valores de la columna de balanceo en una columna de ceros y uno:

Tabla J		x1	x2 (cb_1)	x3	s4	s5	s6	B
	z	-a	-b	-c	0	0	0	0
	s4	m	n	0	1	0	0	l_1
fb_1	s5	o	p	q	0	1	0	l_2
	s6	0	r	s	0	0	1	l_3

18 Para comprender mejor los principios matemáticos del algoritmo simplex, acceder al libro Dantzig, G., 1988 Linear programming and extentions, 11 edition, Chapters: 5 Simplex method and two phases, 7 Duality, 8 Pivot element 10 Parametric programming 11 interger programming, Princeton University, NY-USA, https://books.google.com.bo/books?id=2j46uCX5ZAYC&printsec=frontcover&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

fb_1	o	p	q	0	1	l_2
fb_1´	o/p	p(1/p) = 1	q/p	0	1/p	l_2/p

(-b)	b	o/p	1	q/p	0	1/p	l_2/p
b (fb_1´)		(bo)/p	b	(bq)/p	0	b/p	(bl_2)/p
Sumar z		(-a)	(-b)	(-c)	0	0	0
Nueva fila z´		(bo)/p + (-a)	0	(b q)/p + (-c)	0	b/p	(bl_2)/p

n	(-n)	o/p	1	q/p	0	1/p	l_2/p
(-n) (fb_1´)		(-no)/p	(-n)	(-nq)/p	0	(-n)/p	(-n)(l_2)/p
Sumar s_4		m	n	0	1	0	l_1
Nueva fila s_4		(-no)/p + m	0	(-nq)/p	1	(-n)/p	(-nl_2)/p + l_1

r	(-r)	o/p	1	q/p	0	1/p	l_2/p
		(-r) (o/p)	(-r)	(-r) (q/p)	0	(-r)/p	(-r) (l_2/p)
		0	r	s	0	0	l_3
Nueva fila s_6		(-r) (o/p)	0	(-rq)/p +s	0	(-r) (1/p)	(-rl_2)/p + l_3

Efectuadas las conversiones la tabla J cambia para dar paso a la tabla K, donde la variable x_2 ha sido asignada como importante para la función objetivo en cumplimiento a la normativa de convertir los valores de la columna en ceros y la unidad.

Tabla K	x_1	x_2 (cb_1)	x_3	s_4	s_5	B
Z	(bo)/p + (-a)	0	(bq)/p + (-c)	0	bp	(bl_2)/p
s_4	(-no)/p + m	0	(-nq)/p	1	(-n)/p	(-nl_2)/p + l_1
x_2	o/p	1	q/p	0	1/p	l_2/p
s_6	(-r) (o/p)	0	(-rq)/p + s	0	(-r) (1/p)	(-rl_2)/p + l_3

Esta nueva tabla K, permite repetir (iterar) el procedimiento en busca de las columnas y filas de balanceo que identifiquen a las variables significativas que optimicen la función objetivo propuesta. Resultado que se puede obtener en tiempo real utilizando sistemas computacionales sin importar el número de variables básicas y de restricciones.

- **Relación con la Programación Lineal (PL)**

Ejemplo uno: PL y algoritmo simplex, PL y programación paramétrica (cambios en los parámetros del modelo determinando la nueva solución y su análisis de sensibilidad en la función objetivo.

Ejemplo dos: PL y algoritmo simplex e inclusión de variables artificiales.

Ejemplo tres: PL y algoritmo simplex, soluciones primales y duales.

Ejemplo cuatro: PL y algoritmo simplex, introducción a la programación entera, solución obtenida considerando variables reales enteras. Para determinar la solución estándar, el procedimiento toma en cuenta la acotación, incorporando nuevas restricciones para cada variable de decisión (acotar) que al ser evaluadas independientemente (ramificar) conducen al óptimo entero.

BIBLIOGRAFÍA

Fundamentos Programación lineal (PL) y algoritmo simplex (AS)

Ventzel, S. E., 1983, Investigación de operaciones problemas, principios, metodologia, Capitulo 3 Programación lineal, Ed. Mir, Rusia,

Gonzales, G. J.A, 1976, Técnicas operativas para la toma de decisiones, Primera parte Contexto cierto – programación lineal, ISBN: 84–7087–160–9, Ed. INDEX, Madrid – España,

Dantzig, B.G., M. Thapa, 1997, Linear programming 1: Chapter 3 simplex method, Springer – Verlag, Serie operations research Stamford University. USA,

Dantzig, G., 1988 Linear programming and extentions, 11 edition, Chapters: 5 Simplex method and two phases, 7 Duality, 8 Pivot element 10 Parametric programming 11 interger programming, Princeton University, NY–USA, Obtenido de: https://books.google.com.bo/books?id=2j46uCX5ZAYC&printsec=frontcover&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

Ficken, A., 1961, The simplex method of linear programming. Chapter: 7 The simplex method tableaux, Chapter 8 effectiveness of the simplex method, Dover edition, 2015, NY–USA, Obtenido de: https://books.google.com.bo/books/about/The_Simplex_Method_of_Linear_Programming.html?id=E152CQAAQBAJ&redir_esc=y.

Referencias bibliográficas:

Sistematización Programación lineal (PL) y algoritmo simplex (AS)

[1] Tíjonov, A., Kostomárov, D., 1987, Conferencias de introducción a las matemáticas aplicadas, Capítulo 6: Problemas de optimización Programación lineal método gráfico, Ed. Mir, Rusia,

[2] Vian, O. Á., 1969, El pronóstico económico en Química industrial, Apéndice Métodos especiales de optimización, Ed. Alhambra segunda edición, p: 265, Madrid – España,

[3] Bronson, R., 1990, Teoría y problemas de Investigación de operaciones, Capítulo 1 Programación matemática, p:1, Serie de compendios Schaum, Mac Graw–Hill, ISBN: 968-451-385-2, primera edición 1982, México,

[4] Simplex method theory http://www.phpsimplex.com/en/simplex_method_theory.htm

[6] Resolución programación lineal (PL) utilizando el algoritmo Simplex, http://www.simplexme.com/de/

[7] Resolución programación lineal (PL) utilizando Simplex two phases method, http://www.phpsimplex.com/simplex/simplex.htm?l=en

[16] Simplex two phases method, Ejemplo dos http://www.phpsimplex.com/simplex/simplex.htm?l=en

[5] Bronson, R., 1990, Teoría y problemas de Investigación de operaciones, Capítulo 4 Programación lineal, el método simplex, p: 34, Serie de compendios Schaum, Mac Graw–Hill, ISBN: 968-451-385-2, primera edición 1982, México,

[14] Bronson, R., op.cit., Cap. 4, Método M, pp: 35 – 41,

[17] Bronson, R., op. cit., Cap. 5, Dualidad, pp: 45 – 53,

[20] Bronson, R., op. cit., Cap. 6, Programación entera y acotación, pp: 54– 60,

[8] Hillier, F., Lieberman, G., 2010, Investigación de operaciones, Novena edición formato PDF, ISBN: 978- 607-15-0308-4, Algoritmo simplex en forma tabular, Cap.4, p: 94,

[9] Idem, Aplicación análisis de sensibilidad, Cap. 6, p: 206,

[10] Ibidem, Programación lineal paramétrica, Cap. 7, p: 259,

[18] Hillier, F., Lieberman, G., op. cit., Cap. 6, Relación primal-dual pp: 189 – 193,

[22] Hillier, F., Liberman, G., op. cit., Cap. 11, programación de restricciones pp: 476 – 480,

[11] Taha, H.A., 2012, Investigación de operaciones, Capítulo 3, Análisis de sensibilidad algebraica. Función objetivo, p: 123, Novena edición, Pearson Educación, México, ISBN: 978-607-32-0796-6, Área: Matemáticas,

[12] Taha, H.A., op. cit Cap. 7, Programación lineal paramétrica, p: 294,

[13] Taha, H.A., op. cit., Cap 3 Método M, pp: 89 – 93,

[15] Taha, H.A., op. cit., Cap.3 Método de las dos fases pp: 89 – 93,

[19] Taha, H., op. cit., Cap. 4, Definición del problema dual, Relaciones primal-dual. pp: 137 – 141,

[21] Taha, H. A., op. cit., Cap. 9, Programación lineal entera, pp: 315 – 335.

(*), Químico Industrial,
Consultor Productividad, Calidad e Innovación Tecnológica,
Diplomado Investigación Operativa,
Editor Revista Tecnológica,
Facultad de Tecnología – UMSA.