DESCOMPOSICIÓN DEL TEST DE FRIEDMAN APLICADO A PRUEBAS DE DEGUSTACIÓN

Lic. Valdez Blanco, Dindo

dindovaldez@hotmail.com

RESUMEN

Anderson (1959) analizó las tablas de contingencia de doble entrada con los totales marginales constantes desarrollando la descomposición del test x^2de Pearson en componentes ortogonales y Rayner (1989) aplicó estas tablas y la prueba x^2 a las pruebas de degustación de sabor de distintas variedades de un determinado producto. La descomposición del test x^2 se puede aplicar como una prueba de homogeneidad entre filas (variedades), tal descomposición hace del test más informativo y exhaustivo en su aplicación a este tipo de tablas donde el primer componente de tal descomposición coincide con el estadístico Q_F del test de Friedman, y los subsecuentes componentes son extensiones a esta prueba.

PALABRAS CLAVE

Test Chi cuadrado, Test de Friedman, Escalas de Likert, Descomposición ortogonal

1. DESCOMPOSICIÓN ORTOGONAL DEL TEST CHI CUADRADO DE PEARSON

Primero, consideremos una tabla de contingencia de doble entrada de observaciones N_{ij} ; $i = 1, 2, ..., r$, $j = 1,2,..., c$, donde los totales de las filas $n_{i\bullet}$ y los totales de las columnas $n_{\bullet j}$ son valores conocidos(constantes), la clasificación de las columnas está ordenada y no el de las filas. Para docimar la hipótesis nula de homogeneidad entre las filas el estadístico X^2 se define como,

$$\chi^2 = \sum_i \sum_j \frac{(N_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \qquad (1)$$

con $E_{ij}=n_{i\bullet} n_{\bullet j}/n$, siendo n el total de datos.

Sin embargo, es posible hacer más potente a esta prueba descomponiéndola en c-1 componentes ortogonales para analizar efectos de escala, asimetría, curtosis, y momentos de mayor orden entre las distintas variedades (filas) de la tabla. Para definir tales componentes primero se otorga una puntuación a las categorías de las columnas, luego se definen polinomios ortogonales denotados por h_r(j), los cuales son ortogonales respecto de p_j (la probabilidad marginal).

Tal que:

$$\sum h_r(j) \cdot h_s(j) \cdot p_j = \begin{cases} 0, & si \quad r = s \\ 1, & si \quad r \neq s \end{cases}$$

Emerson[1] (1968) definió estos polinomios como:

$$h_r(j)=(jA_r + B_r)h_{r-1}(j)-C_r h_{r-2}(j), \quad (2)$$

$$j,r = 1,2,...c < n$$

Donde A_r, B_r, C_r son constantes para un r dado tal que h_r(j) sea un polinomio de grado j, y los polinomios iniciales son: h_{-1}(j)=0 y h_0(j)=1. Tomando las probabilidades estimadas

1 P.L. Emerson (1968) ha realizado varios trabajos comparando su método con el de Gram Schmidt, llegando a la conclusión que su método es más rápido y preciso.

$p_j = n_{\bullet j}/n$, proporcionales a las columnas marginales, se define al s-avo componente de la partición como:

$$V_{si} = \frac{1}{\sqrt{n_{i\bullet}}} \sum_{j=1}^{c} N_{ij} \cdot h_s(j)$$, para

$s = 1,...,c-1$ e $i = 1,..., r$

De esta manera el estadístico χ^2 resulta particionado en c-1 componentes llamados Q_S tal que:

$$\chi^2 = \sum_{s=1}^{c-1} \sum_{i=1}^{r} V_{si}^2 = \sum_{s=1}^{c-1} Q_s ,$$

Los componentes V_{si} satisfacen la condición lineal de ortogonalidad,

$$V_{s1}\sqrt{n_{1\bullet}} + V_{s2}\sqrt{n_{2\bullet}} + \cdots + V_{sr}\sqrt{n_{r\bullet}} = 0 , \quad s = 1, \ldots, c-1$$

Bajo la hipótesis nula de homogeneidad entre las filas, cada componente V_{si} tiene distribución asintótica normal estándar, en consecuencia los componentes $Q_s = \Sigma_i\ V^2_{si}$ de la partición tienen distribución asintótica χ^2_{r-1}.

Tales componentes son llamados estadísticos score, y tienen similares propiedades a los estadísticos obtenidos por el método de la razón de verosimilitud (Rayner, 1989, sección 3.4).

2. APLICACIÓN AL TEST DE FRIEDMAN

Supongamos que r>2 tratamientos son rankeados(clasificados) cada uno por n personas(jueces), entonces es posible realizar un cuadro de contingencia de doble entrada con r filas(tratamientos) y r columnas(rangos) como se muestra en la tabla

Cuadro Nº 1
Cuadro de contingencia de calsificación de tratamientos según rango

Tratamiento	Rango				$n_{i\bullet}$
	1	2	...	r	
T1	N_{11}	N_{12}		N_{1r}	n
T2	N_{21}	N_{22}		N_{2r}	n
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
Tr	N_{r1}	N_{r1}	...	N_{rr}	n
$n_{\bullet j}$	n	n	...	n	nxr

Donde:

N_{ij} es el número de veces que el tratamiento i recibe el rango j

r es el número de muestras aleatorias

n es el tamaño de las muestras

Lo anterior queda claro ya que cada tratamiento y cada rango es asignado n veces.

Aplicando la definición, el estadístico χ^2 de Pearson para este tipo de tablas resulta:

$$\chi^2 = \frac{r}{n} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} (N_{ij} - \frac{n}{r})^2 = \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{i=1}^{r} V_{si}^2 = \sum_{s=1}^{r-1} Q_s$$

Donde los componentes están dados por

$$V_{si} = \frac{\sqrt{r-1}}{r} \left(\sum_{j=1}^{r} h_s(j) \frac{N_{ij} - n/r}{\sqrt{n/r}} \right),$$

$s = 1,..., r-1$; $i = 1,..., r$. (3)

El primer componente de esta descomposición resulta ser el estadístico del test de Friedman, tal que

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{r} V_{1i}^2 = \frac{12}{rn(r+1)} \sum_{i=1}^{r} \left(R_i - \frac{n(r+1)}{2} \right)^2 = Q_F$$

Donde R_i es la suma de los rangos para el i-ésimo tratamiento $R_i = \sum_{j=1}^{r} N_{ij}$.

3. INTERPRETACIÓN DE LOS COMPONENTES

Ya que los componentes V_{si} envuelven momentos de orden s, los componentes Q_S detectan los efectos del s-avo momento bajo la hipótesis nula y por esta razón se puede considerar al test de Friedman como un test de posición ya que envuelve polinomios de primer grado en su cálculo, de esta manera los subsecuentes componentes Q_S para $s = 2,...r-1$, se consideran las extensiones al test de Friedman, puesto que estos miden adicionalmente los efectos en la escala, asimetría, curtosis, y momentos de mayor orden respectivamente.

4. APLICACIÓN A UNA PRUEBA DE DEGUSTACIÓN

Para mostrar la utilidad de tal descomposición se realizó un estudio en un grupo de personas universitarias entre los 18 y 25 años de edad con el objeto de medir la preferencia sobre cinco sabores de yogurt bebible (coco, frutilla, uva, limón y chicle) donde cada persona clasificó a cada sabor del 1º al 5º en el orden de preferencia llegando a realizar 95 observaciones (secuencias de preferencia) de manera que cada sabor recibió un total de 95 valoraciones (entre 1s, 2s, etc.) Es así que con el conjunto de observaciones se elaboró una tabla de contingencia 5X5, donde las filas corresponden a los sabores (tratamientos) y las columnas a los rangos (bloques).

La hipótesis a docimar es que cada variedad de yogurt tiene el mismo nivel de aceptación (homogeneidad), al aplicar la prueba x^2 de homogeneidad entre filas se obtuvo un valor de 87,47 con 16 grados de libertad y una significancia de 7.2E-12; por tanto podemos concluir que la distribución en las preferencias de los 5 sabores de yogurt no es homogénea al 5% de significación.

Cuadro Nº 2
Frecuencias observadas de escalas de preferencia por sabor de yogurt

Tratamiento (sabor)	Escalas de Preferencia 1	2	3	4	5	Total
Coco	12	18	20	19	26	95
Frutilla	8	17	24	22	24	95
Uva	13	16	18	21	27	95
Limón	15	31	21	16	13	95
Chicle	47	13	12	17	6	95
Total	95	95	95	95	95	475

Donde la escala 1 es la menos gustada y 5 es la mayor en preferencia

En cambio si utilizamos los datos brutos y aplicamos el test de Friedman para probar la hipótesis que los 5 sabores tienen similares resultados se obtiene Q_F=41.364 con una significancia igual a 0. Consecuentemente rechazamos la hipótesis nula y concluimos que los cinco sabores no produjeron idénticos resultados respecto a sus rangos asignados.

Puesto que existen diferencias entre los tratamientos, es importante analizar la influencia de los componentes ortogonales del test x^2 para aclarar donde radican estas diferencias exactamente, para lo cuál calculamos los cuatro componentes. Aplicando la ecuación 2, los polinomios ortogonales de Emerson resultan:

Cuadro Nº 3
Polinomios ortogonales de Emerson basados en los resultados del Cuadro Nº 2

J	1	2	3	4	5
$h_1(j)$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
$h_2(j)$	-1,41	-0,70	0,00	0,70	1,41
$h_3(j)$	1,19	-0,59	-1,19	-0,59	1,19
$h_4(j)$	-0,70	1,41	0,00	-1,41	0,70
$h_5(j)$	0,26	-1,06	1,60	-1,06	0,26

El lector puede comprobar que tales polinomios son orto normales con p_j=0.2.

El valor esperado de la variable N_{ij} es 19 en todos los casos.

Efectos de posición y escala. Basados en los anteriores resultados, la media o efecto lineal para el i-ésimo sabor está relacionado con los elementos V_{1i} quedando definida como:

$$V_{1i} = \frac{2}{5}\sum_{j=1}^{5} h_1(j)\frac{N_{ij}-19}{\sqrt{19}}, \qquad i=1,\ldots,5$$

De igual manera la variación llamada también efecto de dispersión o escala queda definido por:

$$V_{2i} = \frac{2}{5}\sum_{j=1}^{5} h_2(j)\frac{N_{ij}-19}{\sqrt{19}}, \qquad i=1,\ldots,5$$

Los subsecuentes componentes son calculados aplicando la ecuación 3 y se presentan en el cuadro Nº 4.

Cuadro Nº 4
Componentes de la partición del estadístico χ^2 basados en los resultados del Cuadro Nº 3

	Lineal	Cuadrático	Asimetría	Curtosis
Variedad	V_{1i}	V_{2i}	V_{3i}	V_{4i}
Coco	1,88	-0,05	0,77	0,24
Frutilla	2,40	-1,26	0,38	0,49
Uva	2,14	0,38	0,25	0,00
Limón	-1,36	-1,91	1,75	-0,85
Chicle	-5,06	2,85	-3,17	0,12

El cuadro Nº 5 tiene un estilo parecido al clásico análisis de varianza, basado en los componentes ortogonales del test χ^2 de Pearson. La tabla muestra que la suma de cuadrados de los efectos de ubicación es el estadístico Q_F del test de Friedman para datos ordenados por rangos.

Cuadro Nº 5
Analisis de significación de los primeros componentes de la descomposición del Test χ^2

Fuente	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Significancia
Posición Q^1	4,00	41,36	0,00
Escala Q^2	4,00	13,55	0,01
Residuo Q^3+Q^4	8,00	15,05	0,06
Total χ^2	16,00	69,96	

5. CONCLUSIONES

- El componente Q_2 se considera como un nuevo estadístico, el cuál mide los efectos de escala.

- La prueba extendida de Friedman, confirma una que existen diferencias en cuánto a la posición entre las distintas variedades de yogurt también muestra algo revelador, la existencia de diferencias significativas en la escala, tal diferencia no podría haber sido revelado si no se utilizaba la descomposición del test chi cuadrado. El residuo mide los efectos de asimetría y curtosis simultáneamente y este no es significativo al 5%. En estos estudios de comparación, tales datos usualmente son analizados mediante el tradicional análisis de varianza, pero de una manera distinta al análisis de rangos, ya que esta prueba puede verse afectado por valores atípicos que llevarían a tener una heterogeneidad en la varianza y por la asunción de normalidad de los datos.

- El análisis realizado es más robusto que el ANOVA, en el sentido que ninguno de los dos supuestos: homogeneidad en la varianza y normalidad de los datos, han sido asumidos. También este estudio ha demostrado ser más exhaustivo que la simple aplicación del test de Friedman.

BIBLIOGRAFÍA

P. Anderson, Revista Electrónica *Biometrics*, septiembre de 1968.

J.C. Rayner, *Smooth Tests of Goodness of Fit* , Oxford University Press, New Cork,1989

Dindo Valdez, *Pruebas Suavizadas de Bondad de Ajuste con Aplicación en Pruebas No Paramétricas*, trabajo de tesis, UMSA, La Paz, 2001

Emma Mancilla, *Teoría Asintótica con Aplicación a Cuadros de Contingencia*, trabajo de tesis, UMSA, La Paz, 1998

Alan Agresti, *Categorical Data Análisis*, Wiley Press, New Cork, 1990