NÚMEROS DE BERNOULLI Y APLICACIONES DEL CÁLCULO COMPLEJO A LA ESTADÍSTICA

Lic. Raúl León Delgado Álvarez

✉ *dea_5@hotmail.com*

RESUMEN

Los trabajos de notables Matemáticos y Estadísticos, como Bernoulli, Cauchy, Hadamard hacen ver que las aplicaciones en el campo de la Estadística son de mucha utilidad y su tratamiento a través del Cálculo Complejo tiene ventajas comparativas que ayudan a la comprensión de sus aplicaciones.

PALABRAS CLAVE

Función Analítica, números de Bernoulli, series de Laurent

ABSTRACT

The works of notable Mathematicians and Statisticians, such as Bernoulli, Cauchy, Hadamard show that the applications in the field of Statistics are very useful and their treatment through Complex Calculus has comparative advantages that help to understand their applications.

KEYWORDS

Analytical function, Bernoulli numbers, Laurent series

1. INTRODUCCIÓN

Son muchas las aplicaciones al campo de la teoría Estadística las que aporta el Cálculo complejo, aquellas en las que no es suficiente el campo de los números reales, como recurso para justificar las características de la las funciones de probabilidad y el soporte contable de las mismas, es por ejemplo importante justificar la convergencia de una suma infinita como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad ,p > 1$$

que para $p = 2$ converge hacia el valor $\pi^2/6$, o equivalentes para hallar características numéricas de las funciones de probabilidad o demostrar éstas que no existen.

El presente artículo mostrará una aplicación del Cálculo Complejo para problemas similares al considerar expansiones dentro de ese campo.

2. DESARROLLO

Sean dos series de potencias:

$$(1) \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-a)^i$$

$$(2) \quad \sum_{i=0}^{\infty} b_i (z-a)^i$$

donde r y g son los radios de convergencia de las series (1) y (2) de coeficientes, números positivos, además $b_0 \neq 0$.

Si $\sigma = min\ (r\ y\ g),\ si\ r = g = \alpha$

Entonces ambas series serán convergentes en el círculo $|z - a|<\sigma$, si en este círculo hay ceros de la expansión:

$$b_0 + b_1(Z-a) + \cdots + a_n(Z-a)^n \quad (2)$$

Se toma un nuevo circulo de radio menor en cuyo interior, la suma (2) no se anule, existe puesto que el punto a no es cero de la suma (2) debido a la condición de que $b_0 \neq 0$ así entonces existe un circulo $|z - a|<R$.

En el cual ambas series (1) y (2) son convergentes y la suma de la serie (2) carece de ceros.

En el interior de este círculo la relación

$$f_z = \frac{a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots}{b_0 + b_1(z-a) + \cdots + b_n(z-a)^n + \cdots}$$

Representa una función analítica la cual consecuencia de la regla de derivación del cociente; por lo tanto, existe una serie de potencias

$$c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

Que expresa a la función $f_{(z)}$ en el entero del círculo $|z - a|<R$ cociente de las series (1) dividendo y (2) divisor, realizando la división por el método de los coeficientes indeterminados (algoritmo de la división)

$$[c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n] * [b_0 + b_1(z-a) + \cdots + b_n(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n] * [b_0 + b_1(z-a) + \cdots + b_n(z-a)^n] = a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots$$

Obsérvese que siendo convergente en el interior del círculo $|z - a|<R$ tiene que ser absolutamente convergente, por eso pueden multiplicar miembro a miembro

Realizando la multiplicación se obtiene:

$$c_0b_0 + (a_0b_1 + c_1b_0)(z-a) +$$
$$(c_0b_2c_1b_1 + c_2b_0(z-a)^2 + \cdots)$$
$$c_0b_n + c_1b_{n-1} + \cdots + c_nb_0)(z-a)^n + \cdots$$
$$= a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots$$

Como las sumas de las series de potencias que figuran en el primer y segundo miembro coinciden en el circulo $|z - a|<R$ según el teorema de identidad para los series de potencias los coeficientes de ambos series tienen que ser iguales, de donde de resultan los ecuaciones

$$\begin{cases} c_0b_0 = a_0 \\ c_0b_1 + c_1b_0 = a_1 \\ c_0b_2 + c_1b_1 + c_2b_0 = a_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ \quad \cdots\cdots \\ c_0b_n + c_1b_{n-1} + \cdots + c_nb_0 = a_n \end{cases}$$

Es un sistema infinito de ecuaciones lineales respecto de los coeficientes desconocidos $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ la particularidad de este sistema simplifica su solución y consiste en que para cualquier n, $(n=0,1,2,3,\ldots.)$, las primeras $(n+1)$ ecuaciones contienen las $(n+1)$ incógnitas de las primera ecuación $c_0 = a_0/b_0$, ($b \neq 0$ según la hipotesis) y sustituyen dos en la segundo se obtiene

$$a_1 = \frac{a_0}{b_0}b_1 + c_1b_0$$

$$c_1 = a_1 - \frac{a_0}{b_0}b_1$$

$$c_1 = \frac{a_1b_{0-}a_0b_1}{b^2}$$

Sustituyendo que en la segunda se han hallado las líneas $c_0\ c_1 \ldots c_{n-1}$, sustituyendo en la $(n+1)$ ecuación se obtiene

$$c_n = \frac{a_n - a_0 b_1 c_1 - b_{n-1} - c_n b_1}{{b_0}^{n+1}}$$

Así se puede encontrar el coeficiente de un índice previamente dado, decir c_n en función de $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $b_0, b_1, \ldots, b_n$ en forma de la determinada

$$c_n = \frac{1}{b_0^{n+1}} \begin{vmatrix} b_0 & \cdots & 0 & \ldots & a_0 \\ b_1 b_0 & \ldots & 0 & \ldots & a_1 \\ b_2 b_1 b_0 & \ldots & 0 & \ldots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_n b_{n-1} b_{n-2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

Ejemplo $F_{(z)} = \frac{z}{e^{z-1}}$ esta función analítica en todos los puntos del plano a excepción de los ceros de $e^z - 1$ es decir a excepción de los puntos $0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \ldots$

$$e^z - 1 = \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots \ldots \ldots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

$$F(z) = \frac{z}{z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}}$$

Dividiendo $F(z)$ entre z

$a_0 = 1$ $a_n = 0$, para todo $n \neq 0$

Incluso vale por $z = 0$

$$b_0 = 1 \qquad a_n = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$F_{(z)} = \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{(n+1)!}} + \cdots$$

La serie del denominador es convergente para cualquier z y tiene los mismos ceros que la función $e^z - 1$, a excepción de un cero en el origen de coordenadas por tanto en el interior del círculo $|z| < 2\pi$ la suma no se anula la primera de las ecuaciones da:

$$c_0(1) = 1 \Rightarrow c_0 = 1$$

Como todos los coeficientes de la serie del dividendo a excepción del coeficiente inicial, son iguales a cero, la $(n+1)$ ecuación tiene la forma:

$$c_0 \frac{1}{(n+1)!} + c_1 \frac{1}{n!} + \cdots + c_{n-1} \frac{1}{2!} + c_n = 0$$

$$n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + c_2 b_{n-1} + \cdots + c_n b_0 = a_n = 0$$

$$c_0 \frac{1}{(n+1)!} + c_1 \frac{1}{n!} + c_2 \frac{1}{(n-1)!} + \cdots + c_{n-1} \frac{1}{2!} + c_n b_0 = 0$$

También se puede utilizar la formula por el determinante, es decir

$$c_0 = 1$$
$$b_0 = 1, a_0 = 1$$

$$c_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 1 \\ \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

Los números $c_n\, n!$ se denominan números de Bernoulli y designan mediante B_n ; $B_n = C_n!$ Así

$$B_0 = C_0 \quad 0! = 1$$

$$B_n = C_n \; n! = (-1)^n \; n! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \cdots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

De donde se obtiene:

$$B_0 \frac{1}{0\,!\,(n+1)!} + B_1 \frac{1}{1!\,n!} + \ldots + B_n \frac{1}{n!\,1!} = 0$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por *(n+1)!* y observando que $\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$

es el coeficiente binomial $\binom{n+1}{k}$

se tiene

$$B_0 \binom{n+1}{0} + B_1 \binom{n+1}{1} + \cdots + B_n \binom{n+1}{n} = 0$$

$$(n = 1,2 \ldots)$$

Esta fórmula puede representarse en la siguiente forma

$$(1+B_n)^{(n+1)} - B_n^{(n+1)} = 0$$

Como $B_0=1$

$$B_0 + 2B_1 = 0\,; \quad B_1 = 1/2 \;; \quad B_0 = -1/2$$

$$B_0+3B_1+3B_2= 0$$

$$B_2=- 1/3\, B_0 - B_1=1/6$$

$$B_0+4B_1+6B_2+4B_3=0$$

$$B_3=-1/4\, B_0-B_1-3/2\, B_2=0$$

$$B_3=0$$

$$B_0+ 5B_1+ 10B_2+ 10B_3+ 5B_4=0$$

$$B_4=-1/5\, B_0 - B_1-2B_2+ 2B_3=-1/30$$

$$B_0+6B_1+15B_2+20B_3+15B_4+6B_5=0$$

$$B_5= 0$$

$$B_0+7B_1+21B_2+35B_3+35B_4+21B_3+7B_6=0$$

$$B_6=-1/7-B_0-B_1-3B_2-5B_3-5B_4-3B_5$$

$$B_6=1/42$$

Es decir

$$B_0=1,\ B_1=-1/2,\ B_2=1/6,\ B_3=0,\ B_4=-1/30$$

$$B_5=0,\ B_6=1/42$$

Se demuestra que todos los números de Bernoulli de subíndices impares mayores que la unidad son iguales que $B_{2k+1}=0$, k=1,2,3…

En $\frac{z}{e^z - 1}$ sustituyendo *z* por (-*z*) en el desarrollo

$$\frac{z}{e^z - 1} = C_0 + C_1\, Z + C_2\, Z^2 + \cdots + C_n z^n + \cdots$$

$$= B_0 + \frac{B_1}{1!} Z + \frac{B_2}{2!} Z^2 + \ldots + \frac{B_n}{n!} Z^n + \cdots$$

$$\frac{-z}{e^{-z} - 1} = -\frac{ze^z}{(e^{-z} - 1)e^z} = \frac{ze^z}{e^z - 1}$$

$$= b_0 - \frac{b_1}{1!}\, z + \frac{b_2}{2!} z^2 - \frac{b_3}{3!} z^3 + \cdots$$

Sumando

$$\frac{z}{e^z - 1} - \frac{ze^z}{e^z - 1} = \frac{ze^z}{e^z - 1} = \frac{z(1 - e^z)}{(e^z - 1)} = -z$$

$$= 2\frac{b_1}{1!} z + \frac{2}{3} b_3 Z^3 + \cdots + 2\frac{B_{2K+1}}{(2K+1)!} Z^{2K+1} + \ldots$$

Basándose en la unicidad del desarrollo de la serie de –z y la última expresión se tiene

$$2B_1=-1\ ,\ B_3= B_5= B_{2k+1} = 0$$

Solo $B_1=-1/2$ los demas $B_{2k+1}= 0$ para todo k=1,2...

De esta manera el cociente solicitado se puede escribir como:

$$\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{z}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2K}}{(2k)!}Z^{2k}$$

Como los puntos singulares de la función $\frac{z}{e^z-1}$ más próximos al origen de coordenadas son $Z_1=2\pi i$, $Z_2=-2\pi i$

En estos puntos la función no está definida y no puede definirse de modo que se conserve la continuidad el radio de convergencia de la serie es 2π.

De esta relación según la fórmula de Cauchy-Hadamard se define que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|B_n|}{n!}} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[2k]{\frac{|B_k|}{(2K)!}}=\frac{1}{2\pi}$$

$B_{2K+1}=0$, k=1,2,3, por lo tanto, para cualquier $\epsilon>0$, existe un conjunto infinito de números B_{2k} que satisfacen la desigualdad

$$|B_{2k}|>\frac{2k!}{(2\pi+\epsilon)^{2k}}$$

Es decir son muy grandes en comparación con sus índices 2k.

Del desarrollo anterior se pueden obtener los desarrollos de las funciones de *zcotg z; tag z; zcosec z* al hacer

$$Cotg\ z=\frac{cos\ z}{sen\ z}$$

$$=\frac{\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}{\frac{e^{iz}-e^{iz}}{2i}}=i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{iz}}$$

$$Cotg\ Z=i\left[\frac{e^{iz}+\frac{1}{e^{iz}}}{e^{iz}-\frac{1}{e^{iz}}}\right]=i\left[\frac{\frac{e^{2iz}+1}{e^{iz}}}{\frac{e^{2iz}-1}{e^{iz}}}\right]$$

$$=i\left(\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}\right)$$

Se puede revisar como

$$Cotg\ z=i+\frac{zi}{e^{2iz}-1}$$

De donde

$$z\ Cotg\ z=iz+\frac{2iz}{e^{2iz}-1}$$

La función: $\frac{2iz}{e^{2iz}-1}$ se puede desarrollar de acuerdo a

$$\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{z}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Z_{2k}}{(2k)!}z^{2k}$$

Haciendo *2iz* como variable nueva que converge para $|2iz|<2\pi \Rightarrow |z|<\pi$, el cociente:

$$\frac{2iz}{e^{2iz}-1}=1-\frac{2iz}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2iz)^{2k}$$

lo que significa:

$$z\ Cotg\ z=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2^{2k}\frac{B_{2k}}{(2k)!}z^{2k}$$

Considerando identidades trigonométricas se puede expresar como

$$Tag\ z\ =\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(2^{2k}(2^{2k}-1)\right)\frac{B_{2k}}{(2k)!}z^{2k}$$

Donde $|z|<\pi/2$, también para la

$$Sec\ z=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2^{2k}\frac{E_{2k}}{(2k)!}z^{2k}$$

Donde $|z|<\pi/2$, los coeficientes E_{2k} se denominan números de Euler, y se determinan por las ecuaciones:

$$E_0 = 1$$

$$E_0 + \binom{2n}{2} E_2 + \binom{2n}{4} E_4 + \cdots + \binom{2n}{2n-2} E_{2n-2} + E_{2n} = 0,$$

$$n = 1,2,3 \ldots$$

Algunos términos serán:

$E_0=1,\ E_2=-1,\ E_4=5,\ E_6=-61,\ E_8=1385.$

Del desarrollo en serie de Laurent para un punto arbitrario $z \epsilon D$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

donde los coeficientes

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)dt}{(t - z_0)^{n+1}} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

donde $\Gamma: |z-z_0|=\lambda,\ r<\lambda<\mathbb{R}$

Donde $\sum a_n e^{-\lambda_n z}$, los coeficientes a_n son complejos, pero los λ_n son números reales no negativos que satisfacen: $\lambda_{n+1} > \lambda_n$ para n=1, 2,3…. El $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$

Dicha serie se denomina serie de Dirichlet general y los lambda se llaman exponentes de la serie, de esta manera $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$ se conoce como la serie de Dirichlet ordinaria o clásica.

Escribiendo el desarrollo en serie de Laurent

$$Cotg\ z - \frac{1}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{z+k\pi} \right)$$

integrando término a término a lo largo de la curva arbitraria que pasa por origen de coordenadas y no pasa por $k\pi$ $k=1, 2, 3$…..

$$\int_0^z \left(cotz - \frac{1}{z} \right) dz = \sum_{k=1}^{\infty} ln \left(\frac{k\pi - z}{k\pi} . \frac{k\pi + z}{k\pi} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right)$$

Interpretando la suma infinita como un límite de una suma, se tiene:

$$ln \frac{senz}{z} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} ln \left(1 - \frac{z^2}{k^2 z^2} \right)$$

Donde $\frac{senz}{z} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2} \right)$

pero:

$$\frac{1}{z - \pi i} + \frac{1}{z + \pi i} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(i\pi)^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{(i\pi)^{k+1}}$$

$$= -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k-1}}{(i\pi)^{2k}}$$

$$para \quad |z| < \pi i$$

Por lo tanto los coeficientes de las potencias pares de z, en el desarrollo de *cotg z -1/z* son iguales a cero, mientras que los impares se expresan como:

$$-2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j\pi)^{2n}} = \frac{2}{\pi^{2n}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2n}}$$

$$Cotg\ z - \frac{1}{z} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{-2}{\pi^{2m}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2m}} \right] z^{2m-1}$$

También se mostró el desarrollo:

$$cotgz - \frac{1}{z} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{2m}}{(2m)!} B_{2m} z^{2m-1}$$

Comparando los dos desarrollos se tiene:

$$\frac{-2}{\pi^{2m}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2m}} = (-1)^m \frac{2^{2m}}{(2m)!} B_{2m}$$

$$\frac{2}{\pi^{2m}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{2m}} = (-1)^{m-1}\frac{2^{2m}B_{2m}}{(2m)!}$$

De dónde despejando:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{2m}} = \pi^{2m}2^{2m-1}(-1)^{m-1}\frac{B_{2m}}{(2m)!}$$

Finalmente para distintos valores de m se tienen las sumas siguientes

$$m = 1, \qquad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{2}} = \frac{\pi^2}{2!}(-1)^0\frac{2}{6},$$

porque B_2=1/6 , realizando operaciones:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{2}} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$m = 2, \qquad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{4}} = \frac{\pi^4(-1)^3 2^3}{24}B_4,$$

pero B_4=(-1)/30, realizando operaciones

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{4}} = \frac{\pi^4}{90}$$

m=3, considerando B_6=1/42

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{6}} = \frac{\pi^6}{945}$$

De esta manera se pueden obtener varias sumas.

3. CONCLUSIONES

En el desarrollo del presente artículo, se pudo observar que el tratamiento desde el punto de vista del Calculo Complejo, primero observando las ventajas de operaciones básicas como la división entre polinomios dentro del campo complejo, permite analizar las ventajas de trabajar con funciones analíticas, posteriormente haciendo uso del desarrollo de serie de Laurent, se pueden comparar desarrollos de series que al igualar coeficientes da lugar a sumas infinitas como las que se pudo observar al final del desarrollo.

Aunque esta manera de obtener sumas infinitas no es la única, dado que se pueden comparar con desarrollos de Fourier para obtener los anteriores resultados.

Cuando se hace uso de las fórmulas de Euler Mac Laurin, las mismas son muy laboriosas el método expuesto aquí puede simplificar muchos cálculos innecesarios dado que se puede considerar los números de Bernoulli como elementos ya desarrollados y así obtener más fácilmente las indicadas sumas infinitas.

BIBLIOGRAFÍA

1. Alexei Ivanovich MARKUSHEVICH, Teoría de las funciones de variable Compleja, Editorial MIR. Moscú.
2. Jerrold E. MARSDEN, Michael HOFFMAN, Análisis Básico de Variable Compleja, Editorial Trillas.
3. KRASNOV M.L.KISELIOV, A, I MAKARENKO, Funciones de Variable Compleja Editorial MIR Moscú.