Paradoja de los Cumpleaños

http://www.estadisticaparatodos.es/taller/cumpleanos/cumpleanos.html

La paradoja del cumpleaños establece que si hay 23 personas reunidas existe una probabilidad del 50,7% de que al menos dos personas de ellas cumplan años el mismo día. Para 60 o más personas la probabilidad es mayor del 99%. Obviamente es casi del 100% para 366 personas (teniendo en cuenta los años bisiestos).

En sentido estricto esto no es una paradoja ya que no es una contradicción lógica; es una paradoja en el sentido que es una verdad matemática que contradice la común intuición. Cuando se propone este problema por primera vez y se pide una estimación sobre el tamaño mínimo que debería tener un grupo para que sea más probable que improbable que dos personas compartan el día del cumpleaños, la mayoría de las personas se equivoca por completo. La respuesta intuitiva que se da a menudo es 183, es decir 365 dividido entre dos. La cantidad correcta no es algo a lo que la gente pueda llegar fácilmente y, ciertamente, no por intuición. Es bastante extraño que las primeras estimaciones sean inferiores a 40. Y sin embargo la respuesta es 23.

La clave para entender estas “sorprendentes” recurrencias es pensar que hay muchas posibilidades de encontrar parejas que cumplan años el mismo día.

Un análisis superficial asume que 23 días (cumpleaños de las 23 personas) es una fracción demasiado pequeña del posible número de días distintos (365) para esperar repeticiones. Y así sería si esperáramos la repetición de un día dado. Pero las repeticiones, en el caso supuesto, pueden darse entre dos días cualesquiera, con lo que éstas pueden combinarse entre sí de un número de formas que aumenta rápidamente con el número de elementos a considerar. Así:

- Entre dos personas C1 y C2 sólo cabe una posibilidad de repetición de cumpleaños: Cl=C2.
- Con tres ya hay tres posibilidades (Cl=C2; Cl=C3; C2=C3).
- Con cuatro ya habría seis, (4x3)/2=6.
- Con un grupo de 10 personas, (10x9)/2=45 posibilidades.
- Con 23 personas, hay (23×22)/2 = 253 parejas distintas, cada uno de ellas es una candidata potencial para cumplir la paradoja.
- Y así sucesivamente, en uno de 40, ya son 780 las parejas, y 1770 si juntamos 60 personas.

No hay que mal interpretar lo que nos dice esta paradoja: si entramos en una habitación con 22 personas, la probabilidad de que cualquiera cumpla años el mismo día que usted, no es del 50%, es mucho más baja, sólo hay un 6% de probabilidades. Esto es debido a que ahora sólo hay 22 parejas posibles y se necesitan 253 personas para que haya más de un 50% de probabilidades de que esto ocurra.

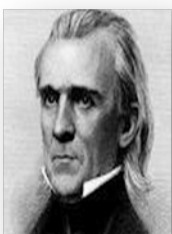
El problema real de la paradoja del cumpleaños consiste en preguntar si el cumpleaños de cualquiera de las 23 personas coincide con el cumpleaños de alguna de las otras personas.

Ejemplos de coincidencias

- En los jugadores del Osasuna (liga 2005/06) hay coincidencias de cumpleaños.

- De un total de sólo 19 monarcas españoles desde los reyes Católicos, coinciden Carlos II con Carlos IV (11 de noviembre) y José I con Juan Carlos I (5 de enero).

- De los 40 presidentes de USA hasta Reagan: Polk y Harding nacieron un 2 de noviembre.



Puedes creer que esto puede ser casualidad o si eres mal pensado que esta preparado, por eso nada mejor que hacer un estudio probabilístico riguroso de esta paradoja.

Estimación de la probabilidad

¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de n personas, por lo menos dos de ellas coincidan en su cumpleaños?, desechamos los años bisiestos y los gemelos, y asumimos que existen 365 cumpleaños que tienen la misma probabilidad.

Solución utilizando la regla de Laplace y la Combinatoria

El truco es calcular primero la probabilidad de n personas tengan cumpleaños diferentes

Sea el suceso:

A = {"al menos dos personas celebran su cumpleaños a la vez"} y su complementario

A^c = {"no hay dos personas que celebren su cumpleaños a la vez"}

Caso particular: n=5

El número de casos posibles de celebración de cumpleaños, suponiendo el año de 365 días, es: $365^5 = 6{,}478 \times 10^{12}$

El número de casos favorables: como la primera de las personas puede haber nacido uno de los 365 días del año, la siguiente unos de los 364 días restantes y así sucesivamente, resultan $365 \times 364 \times 363 \times 362 \times 361 = 6{,}303 \times 10^{12}$ casos de que no existan dos personas que hayan nacido el mismo día.

Aplicando la regla de Laplace

$P(A^c)$ =casos favorables/casos posibles =6,303 / 6,478 = 0,973

$p(A) = 1 - p(A^c) = 1 - 0{,}973 = 0{,}027$

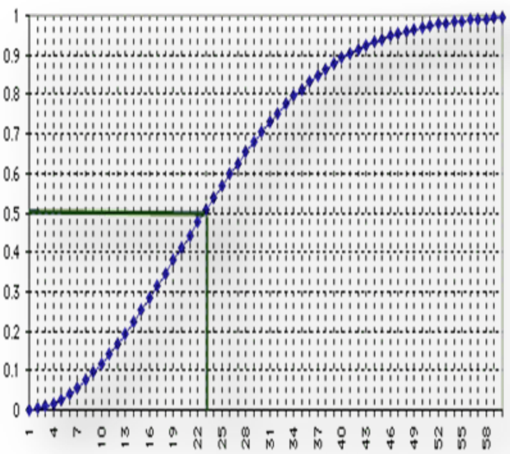
El problema puede generalizarse para una reunión de n personas. La probabilidad de que al menos dos de ellas cumplan años el mismo día es:

$$1-\frac{365\times364\times363\times\ldots(365-n+1)}{365^n}$$

Para n = 23, 30 y 50 la probabilidad mencionada es: 0.51, 0.71 y 0.97 respectivamente. Como se ve, para n = 23 existe, aproximadamente, una probabilidad a la par que por lo menos coincidan dos cumpleaños, y cuando n= 50, tenemos casi la certeza de que ocurrirá la coincidencia

Numérica y gráficamente, las posibilidades de que distintos grupos de personas compartan cumpleaños son las siguientes:

n	prob	n	prob
5	0.027	30	0.706
10	0.117	35	0.814
15	0.253	40	0.891
18	0.347	50	0.970
20	0.411	60	0.995
23	0.507	70	0.999
25	0.569	80	0.999
27	0.627	90	0.999



Solución utilizando la regla de Laplace y la regla del producto

Otra manera de plantear el problema para que la solución no parezca tan sorprendente es que si se juntan 23 personas en una habitación, calculamos las opciones de que no compartan cumpleaños.

- Supongamos que está solo en una habitación. Las opciones de que todos los de la habitación tengan un cumpleaños diferente son obviamente del 100% o, en el lenguaje de probabilidad,1.
- Ahora entra otra persona. Las probabilidades de que tenga un cumpleaños distinto del nuestro son 364/365 (Vamos a ignorar los años bisiestos en este cálculo), o 0,9973, que es lo mismo que el 99,73%.
- Entra un tercero. La probabilidad de que esa persona tenga un cumpleaños distinto del de usted y del segundo es 363/365. La probabilidad de que los tres tengan cumpleaños diferentes es 364/365 veces 363/365, o 0,9918.
- Así que las opciones de que 23 personas tengan distintos cumpleaños son 364/365 * 363/365 * 362/365 x 361/365 x ... x 343/365, que da como resultado 0,493. Esto significa que hay un 49,3% de posibilidades de que todos los de la habitación tengan cumpleaños diferentes y, a la inversa, un 50,7% de posibilidades de que al menos dos

$$1-\left(\frac{364}{365}\right)^{n}$$

compartan cumpleaños.

En contraste, la probabilidad que cualquiera en una habitación de n personas tengan el mismo día de cumpleaños que usted está dada por

que para n = 23 sólo da alrededor de 0,061, y se necesitaría al menos una n de 253 para dar un valor de 0,5.

Para empezar un gran proyecto, hace falta valentía. Para terminar un gran proyecto, hace falta perseverancia.