

Modelo Estocástico Aplicado al Proceso de Formación de Precios de Índices Bursátiles

Autor: Lic. Sugar Carlos Flores Condori

El modelo Wiener-Gauss

En el caso de los activos financieros, el modelo Wiener-Gauss asume la hipótesis de la existencia de un mercado eficiente, en su forma débil, ya que las variaciones de precio son completamente aleatorias y solo ocurren cuando aparece nueva información. Por su parte, la aparición de nueva información en el mercado también es aleatoria. El proceso Wiener-Gauss puede ser extendido al uso de los activos financieros a través del siguiente modelo general (Hull, 1997)

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (1)$$

donde S : precio del activo financiero, dS : cambio en los precios del activo financiero S , μ : rentabilidad esperada del activo financiero S , dt : cambio en la variable tiempo, σ : volatilidad del activo financiero S , ε : variable aleatoria, se distribuye $N(0,1)$, y $dz = \varepsilon \sqrt{dt}$

De esta forma, se puede establecer que el cambio de los precios de los activos financieros obedece a un concepto de rentabilidad esperada por el diferencial de tiempo transcurrido más un factor de volatilidad de carácter aleatorio. Ahora bien, una variable x sigue un proceso de Ito (1951) si puede ser expresada mediante la ecuación:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \quad (2)$$

donde dz sigue un proceso Wiener, siendo a y b funciones de x y t . Por su parte, aplicando el Lemma de Ito se demuestra que una función G de x y t sigue igualmente un proceso Wiener. Dado que dz sigue el mismo proceso Wiener de la ecuación (2), entonces G también sigue un proceso Ito. Así, empleando el Lemma de Ito en la ecuación (1) y si $a = \mu S$ y $b = \sigma S$, se puede observar el proceso seguido por una función G de S y t :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz \quad (3)$$

Ahora bien, siguiendo a Hull (1997), si $G = \ln S$ y, de acuerdo a la ecuación (3) y dado que μ y σ son constantes, entonces como $G_t = \ln S_t$ y $G_{t-1} = \ln S_{t-1}$,

$$dG = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \quad (4)$$

Luego, de la ecuación (4), es posible seguir que:

$$\ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \sim N \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt, \sigma^2 dz \right] \quad (5)$$

Del planteamiento anterior se puede desprender que los valores del activo financiero S se distribuyen en forma lognormal y el cambio en los valores del activo S , vale decir la rentabilidad $\ln(S_t / S_{t-1})$ se distribuye normalmente.

Aplicaciones del modelo Wiener-Gauss en el campo de la economía financiera

Los modelos estocásticos son ampliamente empleados en términos prácticos y en términos teóricos. En términos prácticos, en los mercados financieros altamente desarrollados y eficientes, es posible identificar un creciente empleo de estos modelos por parte de analistas financieros (Pitt, 1995; Huamingy Russell, 1999; Watanabe, 2000). En términos teóricos, los modelos estocásticos tienen una aplicación amplia. Desde la perspectiva de la economía financiera, existe una serie de trabajos académicos de relevancia que sirve de soporte al estudio.

En síntesis, de acuerdo a la revisión anterior, el modelo Wiener-Gauss cuenta con una amplia aceptación en el campo de la economía financiera, puesto que se le considera como el modelo pertinente para tipificar los procesos de formación de precios en los mercados bursátiles. Más aún, tradicionalmente

se ha considerado que la rentabilidad de los activos financieros es, precisamente, de naturaleza estocástica y que la distribución normal resulta ser la más adecuada para explicar el comportamiento de dicha variable. (Hull, 1997; Connelly, 1998).

Hipótesis

De acuerdo a las principales publicaciones referidas a la aplicación de modelos estocásticos en activos financieros, descritos arriba, y en función del objetivo central de este trabajo, en la Tabla I se definen las hipótesis, con el propósito de su posterior verificación.

Métodos:

Unidad de análisis de datos

La unidad de análisis está dada por los precios semanales de cierre de los índices Europay el IPC de Bolivia, correspondientes al periodo 2004 -2011.

Medidas

Se emplea una serie de medidas validadas y aceptadas ampliamente en la literatura sobre economía financiera y estadística, tales como rentabilidad de un activo financiero, promedio de la rentabilidad de un activo financiero y volatilidad de la rentabilidad de un activo financiero.

Análisis y discusión de los resultados

Comprobación de la hipótesis 1

Estudiando las correlaciones de Pearson entre la rentabilidad actual y la pasada del Índice General Bursátil de Europa y del Índice de Precios al Consumidor de Bolivia en el periodo 2004 -2011 (Tabla II), se tiene que:

- Es posible sostener, con respecto al Índice General Bursátil de Europa, que existe evidencia estadística de correlación trabajando con un nivel de significación del 5% aunque dicha correlación no es significativa trabajando al 1% de significación. En efecto, el coeficiente de determinación demuestra que la rentabilidad pasada y la rentabilidad presente del Índice General Bursátil de Europa se relacionan solo en un 0,81%.

- En relación al Índice de Precios al Consumidor de Bolivia se observa que no existe evidencia estadística de correlación y trabajando con un nivel de significación del 5%. En efecto, la correlación de Pearson entre la rentabilidad pasada y rentabilidad presente del Índice de Precios al Consumidor de Bolivia es solo -0,063 en el periodo en estudio.
- Sin embargo para probar que la rentabilidad pasada es irrelevante para explicar la rentabilidad presente, se requiere aplicar la siguiente ecuación de regresión:

$$\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = A + B \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) + E_t \quad (6)$$

Donde:

$\ln S_{t+1} / S_t$: Rentabilidad en el periodo $t+1$

A: constante

B: coeficiente Beta

$\ln S_t / S_{t-1}$: rentabilidad en el periodo t

E_t : error aleatorio

En relación al Índice General Bursátil de Europa se demuestra que la importancia de la rentabilidad pasada para incidir en la rentabilidad actual es cero desde el punto de vista estadístico ($t=1,716$), al trabajar con un nivel de significación del 5%.

Luego la prueba de Kolmogorov – Smirnov (Tabla IV) es categórica para rechazar la hipótesis que dice que la rentabilidad semanal, tanto del Índice General Bursátil de Europa como del Índice de Precios al Consumidor de Bolivia, no se distribuye según una distribución normal. Esta prueba sugiere que la rentabilidad de estos activos financieros se distribuye fundamentalmente de acuerdo con una distribución normal.

*“La confianza en sí mismo es el primer
secreto del éxito”.*

Samuel Johnson

TABLA I
HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

Hipótesis 1	Hipótesis 2	Hipótesis 3
La formación de precios del índice general bursátil de Europa sigue un proceso estocástico y puede ser tipificado por el modelo Wiener Gauss.	Los precios semanales del Índice General Bursátil de Europa estimados a partir del modelo de Wiener Gauss se relacionan de manera significativa con los precios semanales reales de dicho índice. Los precios semanales del Índice de Precios al Consumidor de Bolivia estimados a partir del modelo Wiener Gauss se relacionan de manera significativa con los precios semanales de dicho índice.	Las desviaciones entre los precios semanales del Índice General Bursátil de Europa, estimados a partir del modelo Wiener Gauss, y los precios semanales reales de dicho índice caen dentro de rangos de normalidad. Las desviaciones entre los precios semanales del Índice de Precios al Consumidor en Bolivia, estimados a partir del modelo Wiener Gauss, y los precios semanales reales de dicho índice caen dentro de rangos de normalidad.
La formación de precios del índice de Precios al Consumidor de Bolivia sigue un proceso estocástico y puede ser tipificado por el modelo Wiener Gauss.		

TABLA II					
CORRELACIONES DE PEARSON ENTRE LA RENTABILIDAD ACTUAL Y LA RENTABILIDAD PASADA					
		IGB de Europa		IPC Bolivia	
		ACTUAL	PASADA	ACTUAL	PASADA
CORRELACION DE PEARSON	Actual Pasada	1,000 0,090	0,090 1,000	1,000 -0,063	-0,063 1,00
SIGNIFICADO ESTADISTICO	Actual Pasada	0,043 *	0,043 *	0,114	0,114
N° OBSERVACIONES	Actual Pasada	363 363	363 363	363 363	363 363
La correlación es significativa al nivel del 5%					

TABLA III							
COEFICIENTES DE LA REGRESION							
MODELO		COEFICIENTE	ERROR ESTANDAR	BETA ESTANDAR	t	F	SIGNIFICACION
IGB	Constante	3,07E -03	0,001		2,098		0,037
	Rentabilidad pasada	8,99E -02	0,052	0,090	1,716	2,945	0,087
IPC	Constante	-3,08E -05	0,001		-0,028		0,978
	Rentabilidad	-2,78E -03	0,002	-0,063	-1,205	1,452	0,229

De los resultados descritos es posible señalar que esta hipótesis tiene fuerte soporte estadístico para el conjunto de datos con el cual se ha trabajado y, así, se puede establecer que en el periodo 2004 -2011 la formación de precios tanto del IGB como del IPC tienen un comportamiento aleatorio del tipo Wiener – Gauss. Esto es, que las bolsas mencionadas han

tenido un comportamiento eficiente en la formación de precios del activo financiero analizado. Según el planteamiento anterior, es posible tipificar el proceso de formación de precios semanales del IGB de Europa y del IPC de Bolivia de acuerdo con los siguientes modelos.

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = 0,003375 dt + 0,0278326 dz \quad (7)$$

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = -0,0000932 dt + 0,02118 dz \quad (8)$$

El comportamiento de la rentabilidad para ambos índices se muestra en la siguiente figura:

Comprobación de la hipótesis 2:

A partir del modelo Wiener-Gauss es posible estimar los precios de los índices IGB de Madrid e IGPA de Chile, considerando la esperanza matemática de las ecuaciones 7 y 8, se tiene que, las ecuaciones 9 y 10 representan respectivamente los precios semanales estimados para los índices mencionados:

$$E(S_t) = S_{t-1} \varepsilon^{0,003375} E(S_t) = S_{t-1} \varepsilon^{0,003375} \quad (9)$$

$$E(S_t) = S_{t-1} \varepsilon^{-0,0000932} E(S_t) = S_{t-1} \varepsilon^{-0,0000932} \quad (10)$$

Realizando la aplicación de la esperanza matemática de los precios del IGB de Europa y del IPC de Bolivia, y la comparación con los precios reales del activo financiero y trabajando con un nivel de significación del 5% se comprueba que no existe diferencia significativa entre los valores medios reales y los valores medios esperados. No obstante, el estudio de la correlación de Pearson arroja los resultados esperados

.Si se plantea el modelo de regresión:

$$PSR = A + B \times PSE + E_i \quad (11)$$

Donde PSR: precio semanal real, A: coeficiente que considera todas las variables omitidas en la ecuación B: pendiente de la recta de estimación, PSE: precio semanal estimado, y E_i : error aleatorio, se muestra para el IGB de Europa una capacidad explicativa del 94,2%. Además se observa que los precios esperados generados a través del cálculo de la esperanza matemática no son estadísticamente diferentes de los precios reales del índice en estudio, tal como lo demuestra el test t con un valor de -0,36. Asimismo de determinación de un 94,28%.

TABLA IV		
PRUEBA KOLMOGOROV – SMIRNOV		
Antecedentes	IGB de Europa	IPC de Bolivia
Numero de observaciones	364	364
Media	3,32E -03	-4,554E -05
Desviación estándar	2,781 E -02	2,117E -02
Extremo máximo	0,054	0,067
Diferencia positiva	0,041	0,029
Diferencia negativa	-0,054	-0,067
Kolmogorov – Smirnov	1,038	1,279
Significación	0,231*	0,076

Análogamente, en relación al IGPA, se puede concluir que los precios esperados generados a través del cálculo de la esperanza matemática no son estadísticamente diferentes de los precios reales del índice en estudio (test t de -0,15). A su vez la correlación entre ambas variables es significativa, lo que se puede observar en un coeficiente de correlación de Pearson de 0,953 y el precio esperado es un buen indicador del precio real, de acuerdo al test t de 22,26.

Por tanto, el proceso estocástico Wiener-Gauss puede explicar la formación de precios, tanto del índice general bursátil de la bolsa de Europa como del índice general de precios de las acciones IGPA por cuanto:

- 1) Las estimaciones semanales generadas a través de la esperanza matemática del modelo, arrojan precios cuya media no es significativamente diferente de los precios reales del activo financiero estudiado (test de medias).
- 2) La importancia de los precios esperados, generados a través de la esperanza matemática, es decisiva para explicar la información de precios reales (análisis de coeficientes de la regresión, test t).

Comprobación de la hipótesis 3

En esta hipótesis se debe probar que las diferencias entre los precios reales y los estimados por el modelo Wiener – Gauss pueden ser explicadas por la volatilidad implícita en la rentabilidad de los índices: IGB de Europa e IPC de Bolivia y, por tanto, dichas diferencias encontrarse dentro del rango que la distribución de probabilidad normal permite. Los resultados muestran si las variaciones aleatorias están consideradas en los intervalos de confianza al 90%, al 95%, y al 99%, o si dichas variaciones caen fuera del rango normal.

En virtud de lo anterior, es posible sostener que las variaciones entre los precios estimados a partir del modelo Wiener – Gauss y los precios reales del índice general de la bolsa de valores de Europa y del índice general de precios de las acciones de Bolivia, se explican por la volatilidad implícita en la rentabilidad de este activo financiero toda vez que:

- 1) El 100% de las desviaciones entre los precios reales y los precios estimados del IGBM y del IGPA caen dentro de rangos normales (análisis de la magnitud de los shocks aleatorios).
- 2) La función de distribución de las variaciones entre los precios estimados y los precios reales del IGBM y del IGPA corresponden estadísticamente a una distribución normal (prueba Kolmogorov - Smirnov).

Implicancias y Limitaciones:

El hecho que el modelo Wiener – Gauss sea plausible estadísticamente para describir y explicar la formación de precios tanto del IGB de Europa como el IPC de Bolivia, conlleva a que los analistas bursátiles y los inversores profesionales requieran del empleo de este modelo para su trabajo, tal como ocurre en los principales centros económicos y financieros del mundo (Pitt, 1995) esto no significa que el trabajo con modelos estocásticos sea suficiente para el análisis bursátil. Las técnicas tradicionales como el chartismo o el análisis fundamental son importantes, pero el trabajo sistemático con modelos estocásticos es también necesario en una bolsa de valores del primer mundo como España, y en un país en vías de desarrollo como Bolivia.

Conclusiones

Los resultados presentados son relevantes en forma directa para el IGB de Europa e IPC de Bolivia, y ayudan a evaluar en forma indirecta y parcial el funcionamiento de la bolsa de valores de Europa y Bolivia, toda vez que el análisis efectuado corresponde a sus índices más representativos.

El proceso de formación de precios semanales del IGB de Europa e IPC de Bolivia es aleatorio y, desde el punto de vista estadístico la información pasada es irrelevante. Solo la información presente tiene incidencia en las variaciones de precios de estos activos financieros.

Las rentabilidades semanales del IGB e IPC siguen una distribución normal. Por ello, la bolsa de Europa y la bolsa de Bolivia presentan un comportamiento esencialmente eficiente en la formación de precios semanales de estos activos financieros.

El proceso estocástico de formación de precios del IGB e IPC puede ser tipificado según el modelo Wiener – Gauss, considerando el periodo 2004 – 2011. En ambos casos dicho modelo proporciona las bases para realizar estimaciones de los precios semanales, las cuales son muy adecuadas desde el punto de vista econométrico.

Las variaciones aleatorias que explican las diferencias entre los precios semanales estimados por el modelo Wiener – Gauss y los precios semanales reales del IGB de Europa e IPC de Bolivia, corresponden básicamente a una distribución normal.

Por último, se debe indicar que la naturaleza dinámica de los mercados de valores demanda una realimentación constante del modelo para adecuarse a los “shocks” aleatorios que se producen a través del tiempo.

Bibliografía:

- Connelly T (1998) Is non-normal normal? J. Finan. Plann. 11: 30-35
- Copeland T, Copeland M (1999) Managing corporate, FX risk: A value-maximizing approach. Finan. Mgmt. 38: 68-75
- Ito K (1951) On Stochastic Differential Equations. Vol 4. American Mathematical Society. EEUU pp. 1-51
- Kijima M, Komoribayashi K (1998) Amarkov chain model for valuing credit risk derivatives.
- Pedraja L, Rodriguez E (1996) Commodities – Bonds: A review. Internat. Bus. Assoc. Proc. Los Angeles, California, EEUU. Pp. 28-35.
- Pedraja L, Rodríguez E (2002) Análisis de la Capacidad explicative del Modelo Wiener-Gaussian la formación de precios de activos financieros.
- Anales II Encuentro Anual de Finanzas. Santiago de Chile
- Rodriguez E, Muñoz G (1996) Modelamiento del Proceso Estocastico de Formacion de Precios de la Plata: Su aplicaicon en la valoracion de commodity – bonds. Rev. Inst. Chil. Invest. Opearativa 5: 43-49.

“El fruto del silencio es la oración. El fruto de la oración es la fe. El fruto de la fe es el amor. El fruto del amor es el servicio. El fruto del servicio es la paz.”

William Faulkner

“No se vive sin la fe. La fe es el conocimiento del significado de la vida humana. La fe es la fuerza de la vida. Si el hombre vive es porque cree en algo.”

Madre Teresa de Calcuta